



# Apport des noyaux de sensibilité des ondes PKP et P diffractées pour l'étude de la graine anisotrope et de la couche D'

Marie Calvet

## ► To cite this version:

Marie Calvet. Apport des noyaux de sensibilité des ondes PKP et P diffractées pour l'étude de la graine anisotrope et de la couche D'. Physique [physics]. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2006. Français. NNT: . tel-00129375

**HAL Id: tel-00129375**

**<https://theses.hal.science/tel-00129375>**

Submitted on 7 Feb 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ TOULOUSE III - PAUL SABATIER  
U.F.R. Sciences et Vie de la Terre

**THÈSE**

pour obtenir le grade de  
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ TOULOUSE III

**Discipline :** *Sismologie*

présentée et soutenue

par

**Marie CALVET**

le 30 Juin 2006 à l'Observatoire Midi-Pyrénées

---

**Apport des Noyaux de Sensibilité des ondes PKP et P diffractées  
pour l'étude de la graine anisotrope et de la couche D".**

---

sous la co-direction de :

Sébastien CHEVROT (OMP/UPS, Toulouse)

Annie SOURIAU (OMP/UPS, Toulouse)

devant le jury composé de :

Mme. Barbara ROMANOWICZ	Rapporteur	Professeur, Université de Berkeley
Mme. Véronique FARRA	Rapporteur	Physicien adjoint, IPGP, Paris
M. Georges POUPINET	Examineur	DR, LGIT, Grenoble
M. Michel RABINOWICZ	Président	Professeur, Université de Toulouse III
Mme. Annie SOURIAU	Directeur de thèse	DR, LDTP, Toulouse
M. Sébastien CHEVROT	Directeur de thèse	CR, LDTP, Toulouse

Laboratoire de Dynamique Terrestre et Planétaire, UMR 5562,  
Observatoire Midi-Pyrénées, 14, avenue E. Belin, 31400 TOULOUSE



*à ma grand-mère, Dorothee*

## Remerciements

Je souhaite remercier mes deux directeurs de thèse : Sébastien Chevrot et Annie Souriau. Sébastien a toujours fait preuve d'une grande disponibilité, de beaucoup d'enthousiasme et d'un grand intérêt pour mon travail. Il a su me communiquer sa passion pour la recherche et m'apprendre la rigueur scientifique tout en m'aidant à orienter mes travaux. Annie m'a initiée à la géophysique et à la sismologie lors d'un stage de maîtrise. C'est vraisemblablement son enthousiasme communicatif pour cette discipline qui m'a poussée à effectuer une thèse en sismologie et qui m'encourage aujourd'hui encore à poursuivre dans cette voie. Leurs nombreux conseils et leurs points de vue complémentaires sur mon travail ont permis de mener à bien cette thèse.

Je souhaiterais également remercier toutes les personnes avec lesquelles j'ai pu collaborer pour mes travaux de recherche et d'enseignement : Raphaël Garcia et Valérie Maupin, qui m'a si chaleureusement accueillie à deux reprises en Norvège, puis Peter Van Beek, Agnès Maillard et Joseph Martinod qui m'ont confié durant ces trois années une partie de leurs enseignements. Je remercie également l'ensemble des membres de mon jury de thèse pour leur participation à la soutenance et leurs commentaires constructifs et instructifs.

Je souhaite ensuite remercier tous les membres du laboratoire pour leur gentillesse et leur disponibilité, tout particulièrement Nathalie Dalla-Riva, Cecile Camino et Muriel Barriot qui aident si bien les thésards pour tous les aspects administratifs de la vie de laboratoire. J'ai effectué cette thèse dans d'excellentes conditions matérielles et humaines ainsi que dans une ambiance extrêmement sympathique et détendue. Enfin, un grand merci à tous les copains du laboratoire : Céline et Madjid qui m'ont accompagnée durant ces trois années, Sébastien, Loïc, Sophie, Stéphane et tous les autres ...

Merci à toute ma famille pour son soutien inconditionnel durant ces trois années. Enfin, merci Christophe pour m'avoir toujours écoutée et encouragée.





**Auteur :** Marie CALVET

**Titre :** Apport des noyaux de sensibilité des ondes PKP et P diffractées pour l'étude de la graine anisotrope et de la couche D''

**Directeurs de thèse :** Sébastien CHEVROT et Annie SOURIAU

**Lieu et date de soutenance :** le 30 juin 2006, Université Toulouse III, Observatoire Midi-Pyrénées

**Résumé :** Dans cette thèse, nous avons examiné l'apport de la théorie des noyaux de sensibilité des ondes PKP et  $P_{diff}$  pour l'étude de la graine anisotrope et de la couche D''. Nous avons calculé les noyaux de sensibilité des ondes PKP(DF) dans la graine pour une perturbation élastique transverse isotrope décrite par cinq paramètres. Cependant, lors de l'inversion des résidus de temps de propagation du fichier EHB, nous avons montré que les noyaux de sensibilité n'ont pas un apport significatif par rapport à la théorie des rais pour l'étude de la graine. Par contre, nous avons obtenu trois modèles de graine différents, caractérisés par une sous-graine de 450 à 550 km de rayon avec un axe de symétrie lent ou rapide parallèle à l'axe de rotation de la Terre. Enfin, nous avons calculé les noyaux de sensibilité des ondes PKP, présentant une structure complexe à cause des interférences entre les différentes phases, et ceux des ondes  $P_{diff}$  obtenus en combinant l'approximation de Born et de Langer.

**Mots clés :** Sismologie, noyaux terrestre, couche D'', noyaux de sensibilité, anisotropie transverse isotrope, ondes PKP, ondes diffractées, approximation de Langer

**Discipline :** Sismologie

Laboratoire de Dynamique Terrestre et Planétaire,  
CNRS UMR 5562, Observatoire Midi-Pyrénées,  
14 avenue Edouard Belin, 31400 Toulouse



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>11</b>
<b>1 Etude de la Terre profonde</b>	<b>13</b>
1.1 Le manteau inférieur . . . . .	13
1.1.1 Les images tomographiques du manteau inférieur . . . . .	14
1.1.2 La couche D'' . . . . .	18
1.1.3 L'utilisation des noyaux de sensibilité . . . . .	28
1.2 Le noyau terrestre . . . . .	32
1.2.1 Nature physique et chimique du noyau terrestre . . . . .	33
1.2.2 Exploration sismique du noyau terrestre . . . . .	35
1.2.3 La graine . . . . .	40
1.2.4 L'utilisation des noyaux de sensibilité . . . . .	55
<b>2 Diffusion par une perturbation élastique</b>	<b>57</b>
2.1 Champ diffusé par une perturbation élastique . . . . .	57
2.1.1 Approximation de Born . . . . .	57
2.1.2 Equation d'onde . . . . .	58
2.1.3 Perturbation du champ de déplacement . . . . .	60
2.2 Cas d'une perturbation isotrope . . . . .	62
2.2.1 Perturbation du tenseur élastique . . . . .	62
2.2.2 Matrices et coefficients de scattering . . . . .	63
2.3 Cas d'une perturbation transverse isotrope . . . . .	65
2.3.1 Perturbation du tenseur élastique . . . . .	65
2.3.2 Définition des paramètres anisotropes . . . . .	65
2.3.3 Choix de la référence . . . . .	66
2.3.4 Matrices et coefficients de scattering . . . . .	69
2.4 Conclusion . . . . .	71

<b>3</b>	<b>Noyaux de sensibilité pour les ondes PKP(DF)</b>	<b>73</b>
3.1	Mesure de la perturbation du temps de propagation par cross-corrélation . . .	75
3.2	Noyaux de Sensibilité pour le temps de propagation . . . . .	76
3.2.1	Définition . . . . .	76
3.2.2	Domaine de validité . . . . .	77
3.2.3	Réduction à la théorie des rais . . . . .	78
3.3	Mise en oeuvre numérique . . . . .	81
3.3.1	Elaboration des tables . . . . .	81
3.3.2	Interpolation du modèle de vitesse . . . . .	85
3.3.3	Principe du calcul des noyaux de sensibilité . . . . .	87
3.4	Exemples de noyaux de sensibilité . . . . .	90
3.4.1	Principales caractéristiques des noyaux de sensibilité en temps de propagation . . . . .	90
3.4.2	Noyaux de sensibilité des ondes PKIKP en milieu anisotrope . . . .	96
3.5	Conclusion . . . . .	98
<b>4</b>	<b>Etude de la structure anisotrope de la graine</b>	<b>101</b>
4.1	Le problème direct : Théorie des noyaux de sensibilité versus Théorie géo- métrique des rais . . . . .	103
4.1.1	Noyaux 1D . . . . .	103
4.1.2	Modèle de Ishii & Dziewonski . . . . .	105
4.2	Traitements des données du fichier EHB . . . . .	113
4.2.1	Résidus des ondes PKIKP . . . . .	113
4.2.2	Rais résumés . . . . .	119
4.2.3	Variation des résidus en fonction de $\xi$ . . . . .	122
4.3	Formulation du problème inverse . . . . .	128
4.3.1	Le problème inverse . . . . .	128
4.3.2	Solution des moindres carrés . . . . .	130
4.4	Facteurs influençant les résultats de l'inversion . . . . .	132
4.4.1	Effets de la paramétrisation . . . . .	132
4.4.2	Effets du stacking en rais résumés . . . . .	138
4.4.3	Effets de l'information a priori . . . . .	139
4.4.4	Effets de la distribution des données en distance épacentrale et en $\xi$ .	142
4.5	Modèles radiaux . . . . .	143
4.5.1	Modèles lisses . . . . .	143

4.5.2	Modèles à deux couches . . . . .	149
4.6	Discussion . . . . .	152
4.7	Conclusion . . . . .	156
<b>5</b>	<b>Noyaux de sensibilité des ondes PKP dans un manteau isotrope</b>	<b>159</b>
5.1	Pourquoi s'intéresser à la structure 3D des ondes PKP dans le manteau? .	159
5.2	Noyaux de sensibilité simples . . . . .	161
5.2.1	Interférences entre les différentes phases PKP . . . . .	161
5.2.2	La caustique B . . . . .	164
5.2.3	Description des noyaux . . . . .	165
5.3	Noyaux de sensibilité différentiels . . . . .	169
5.3.1	Principe . . . . .	170
5.3.2	Description des noyaux BC-DF, AB-DF, AB-BC . . . . .	172
5.4	Conclusions et perspectives . . . . .	175
<b>6</b>	<b>Modélisation de la diffusion des ondes diffractées</b>	<b>179</b>
6.1	Equation du mouvement dans une Terre sphérique . . . . .	180
6.2	L'approximation de Langer . . . . .	182
6.3	Modélisation d'une onde P . . . . .	185
6.3.1	Composante radiale du champ de déplacement d'une onde P . . . .	186
6.3.2	Applications aux ondes $P_{diff}$ . . . . .	190
6.4	Champ diffusé par des hétérogénéités isotropes . . . . .	194
6.4.1	Hétérogénéités dans la couche D'' . . . . .	195
6.4.2	Hétérogénéité hors de la D'' . . . . .	200
6.4.3	Expression du champ diffusé . . . . .	203
6.4.4	Couplage des ondes P-SV . . . . .	205
6.4.5	Résultats préliminaires . . . . .	210
6.5	Perspectives et Conclusions . . . . .	215
<b>7</b>	<b>Conclusions et Perspectives</b>	<b>217</b>
	<b>Annexes</b>	<b>223</b>
<b>A</b>	<b>Théorème de représentation</b>	<b>223</b>
A.1	Théorème de représentation . . . . .	223

A.2	Perturbation du champ de déplacement dans le cadre de l'approximation de Born . . . . .	224
<b>B</b>	<b>Coefficients de diffusion par une hétérogénéité isotrope et transverse isotrope</b>	<b>227</b>
B.1	Coefficients de Rayleigh pour des perturbations isotropes . . . . .	227
B.1.1	Couplage P-S . . . . .	227
B.1.2	Couplage S-P . . . . .	228
B.1.3	Couplage S-S . . . . .	228
B.2	Coefficients de Rayleigh pour des perturbations transverses isotropes . . .	230
B.2.1	Couplage P-S . . . . .	230
B.2.2	Couplage S-P . . . . .	231
B.2.3	Couplage S-S . . . . .	231
<b>C</b>	<b>Noyaux d'amplitude des PKP(DF)</b>	<b>233</b>
C.1	Définition de l'amplitude . . . . .	233
C.2	Expression de la perturbation de l'amplitude . . . . .	234
C.3	Noyau de sensibilité pour l'amplitude . . . . .	234
<b>D</b>	<b>Intégration sur un contour complexe</b>	<b>237</b>
D.1	Points selles . . . . .	237
D.2	Points diffractants . . . . .	237
D.3	Contour d'intégration . . . . .	238
<b>E</b>	<b>Détails sur la matrice de couplage dans le cadre de l'approximation de Langer</b>	<b>239</b>
E.1	Cas P - P . . . . .	239
E.2	Cas P - SV . . . . .	241
E.3	Cas SV - P . . . . .	243
E.4	Cas SV - SV . . . . .	244
E.5	Relation avec les coefficients de Rayleigh . . . . .	246
	<b>Bibliographie</b>	<b>247</b>

# Introduction

La plupart des études sismologiques de la Terre profonde ont été effectuées dans le cadre de la théorie des rais. Cependant, les ondes de volume ont un contenu fréquentiel fini, si bien que l'onde échantillonne le milieu non pas le long d'un rai mais sur tout un volume appelé volume de Fresnel. La théorie des noyaux de sensibilité (Li et Romanowicz, 1995; Marquering et al., 1999; Dahlen et al., 2000; Zhao et al., 2000) permet de décrire la sensibilité des ondes aux hétérogénéités au voisinage du rai.

Les phases PKP sont des phases qui permettent d'explorer le manteau inférieur et le noyau. La graine présente une propriété sismique bien caractéristique, elle est anisotrope. La distribution de cette anisotropie a fait l'objet de nombreux travaux. Ainsi, Ishii et Dziewonski (2002) proposent l'existence d'une sous-graine d'un rayon de 300 km avec un changement de comportement anisotrope. Or, la phase PKIKP, compte-tenu de sa longue trajectoire, présente dans la graine un volume de Fresnel de l'ordre de grandeur du diamètre de cette sous-graine. On peut donc se demander si cette sous-graine est bien contrainte en utilisant la théorie des rais.

Jusqu'à présent, les noyaux de sensibilité ont été utilisés pour réaliser des tomographies du manteau. Ainsi, la tomographie à fréquence finie réalisée par Montelli et al. (2004a) suggèrent que les noyaux de sensibilité permettent de résoudre des anomalies de vitesse jusqu'alors trop faibles pour être détectées par la théorie des rais.. Par ailleurs, même en utilisant des ondes à longue période, les noyaux amélioreraient la résolution des panaches mantelliques. Cependant les phases utilisées dans cette étude (phases P et PP) n'ont pas une bonne résolution dans le manteau inférieur. Pour améliorer les images tomographiques du manteau inférieur, et en particulier celle de la couche D" à la base du manteau, il faut ajouter les phases PKP et les ondes diffractées sur la discontinuité noyau/manteau (CMB).

Dans cette thèse, je me suis plus particulièrement intéressée à la façon dont les ondes PKP échantillonnent la graine et la partie inférieure du manteau en calculant les noyaux de sensibilité en temps de propagation correspondants. Le chapitre 1 résume l'état des connaissances sur le manteau inférieur et l'anisotropie de la graine. Dans le chapitre 2 et



3, je développe les éléments théoriques (selon la méthode de Dahlen et al. (2000) basée sur l'approximation de Born et la théorie des rais) et numériques pour le calcul des noyaux de sensibilité en temps de propagation pour des perturbations isotropes et transverses isotropes du milieu élastique. Mes propos seront principalement illustrés avec les ondes PKP(DF). Dans le chapitre 4, je teste l'hypothèse d'une sous-graine : les résidus des ondes PKP(DF) sont inversés afin d'obtenir la structure profonde de l'anisotropie de la graine. Je discuterai l'effet du traitement statistique des données, de la théorie, de la paramétrisation et de la régularisation sur le résultat des inversions. Le problème de l'anisotropie au centre de la graine s'avère non-unique. Dans le chapitre 5, je décris la sensibilité des ondes PKP aux perturbations de vitesse dans le manteau. Les interférences entre les différentes phases PKP entraînent un échantillonnage complexe du manteau inférieur. Par ailleurs, le calcul du noyau de sensibilité de la phase PKP(AB) montre la nécessité de prendre en compte les effets de diffraction à la CMB. Dans le chapitre 6, je propose donc une solution pour calculer les noyaux de sensibilité des ondes  $P_{diff}$  en combinant l'approximation de Born et l'approximation de Langer.

# Chapitre 1

## Etude de la Terre profonde

On ne dispose pas d'observation directe de la Terre profonde. Ce sont des mesures en surface de la gravité, du flux de chaleur, du champ magnétique, de la rotation de la Terre et des mouvements du sol engendrés par les séismes qui nous apportent les connaissances sur les structures profondes de la Terre. Par ailleurs, les progrès numériques et expérimentaux sur la convection mantellique, la géodynamo et la physique des hautes pressions et températures apportent des contraintes supplémentaires.

La sismologie a bénéficié ces dernières années de progrès des techniques d'analyses des données, d'inversion et de modélisation. Par exemple, les images tomographiques du manteau deviennent de plus en plus précises et le coeur même de la Terre, la graine, révèle une structure de plus en plus complexe. Dans ce chapitre, j'aborderai de façon non exhaustive l'état des connaissances sur le manteau inférieur et le noyau terrestre (plus particulièrement sur la graine). Certaines structures sont vraisemblablement dans les limites de résolution des méthodes d'investigation actuelles basées sur la théorie des rais. Dans quelle mesure la prise en compte des effets de fréquence finie est-elle susceptible d'améliorer l'image de la Terre profonde ?

### 1.1 Le manteau inférieur

Le manteau solide terrestre a une épaisseur d'environ 2900 km. On appelle manteau inférieur la région comprise entre la discontinuité à 670 km et la limite manteau/noyau liquide, qui représente environ 70% du volume du manteau. La tomographie globale offre une image de plus en plus précise des structures internes de la planète. La résolution spatiale des variations de vitesse dans le manteau augmente régulièrement grâce aux progrès des techniques d'analyse des données et d'inversion. Ces images tomographiques alimentent

le débat sur diverses questions géophysiques :

- Quelle est la nature de la circulation mantellique à grande échelle ? S’agit-il d’une convection en une ou deux couches ?
- Quelles est l’origine, la morphologie et la nature des plumes et des superplumes ?
- Les hétérogénéités de vitesses ont-elles une origine thermique et/ou chimique ?
- Quel est le rôle de la couche D’’ dans la dynamique globale de la planète ?
- ..

Dans cette section, nous examinerons comment les principales structures du manteau sont imagées par les méthodes tomographiques. Nous aborderons ensuite plus en détails la structure de la couche D’’. Pour une revue plus exhaustive de la tomographie du manteau et de la structure de la couche D’’, on peut se reporter à Lay et al. (1998a), Romanovicz (2003), Trampert et van der Hilst (2005) ... Enfin, nous discuterons comment la prise en compte des effets de fréquence finie est susceptible d’améliorer la résolution spatiale des anomalies de vitesse dans le manteau inférieur.

### 1.1.1 Les images tomographiques du manteau inférieur

Les modèles tomographiques de vitesse de l’onde P et S apportent des informations complémentaires sur la structure du manteau. Compte-tenu de la distribution géographique des sources sismiques et des stations, les tomographies en ondes P ont une meilleure résolution sous les continents où sont installées de nombreuses stations et au voisinage des zones de subduction (figure 1.1). On a ainsi pu montrer qu’un certain nombre de plaques plongeantes restent confinées dans le manteau supérieur tandis que d’autres plongent profondément dans le manteau inférieur et sont susceptibles d’atteindre la CMB. Les structures à grande longueur d’onde du manteau inférieur sont généralement mieux contraintes avec les tomographies en ondes S. À l’échelle globale, on constate que l’amplitude des anomalies de vitesse en onde S augmente dans les 500 derniers kilomètres du manteau. La partie supérieure du manteau est riche en courtes longueurs d’onde tandis qu’un degré 2 domine le manteau inférieur (Romanovicz, 2003). On observe deux importantes anomalies de vitesse lentes sous l’Afrique et le Pacifique, entourées d’anomalies fortement positives (figure 1.2). La connection entre les plaques plongeantes et cette ceinture d’anomalie positives n’est pas évidente (van der Hilst et al., 1997). On peut l’observer dans certaines régions avec les tomographies en ondes P (comme par exemple au niveau de l’Amérique centrale), mais les tomographies en onde S donnent des résultats beaucoup plus variables (Romanovicz, 2003) d’un modèle à l’autre.

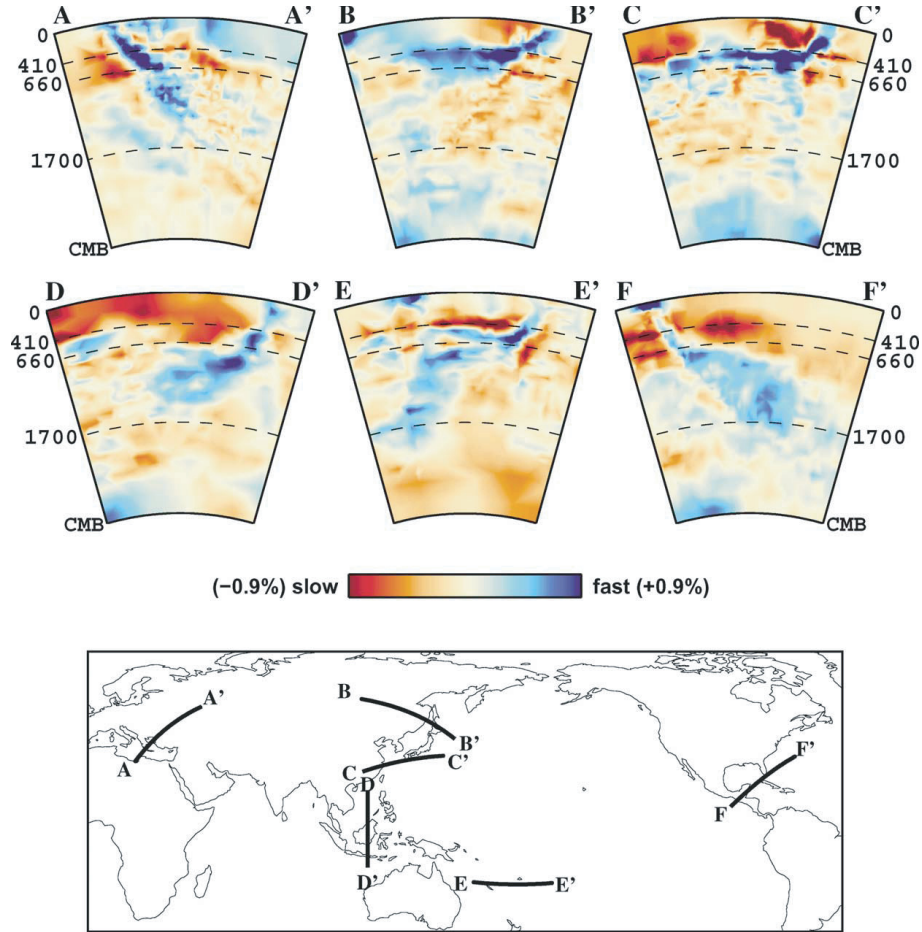


FIG. 1.1 – Exemples de coupes verticales au travers de zones de subduction montrant les anomalies de vitesse rapides associées aux plaques plongeantes dans le modèle tomographique en onde P de Karason et van der Hilst (2001). D'après Romanovicz (2003).

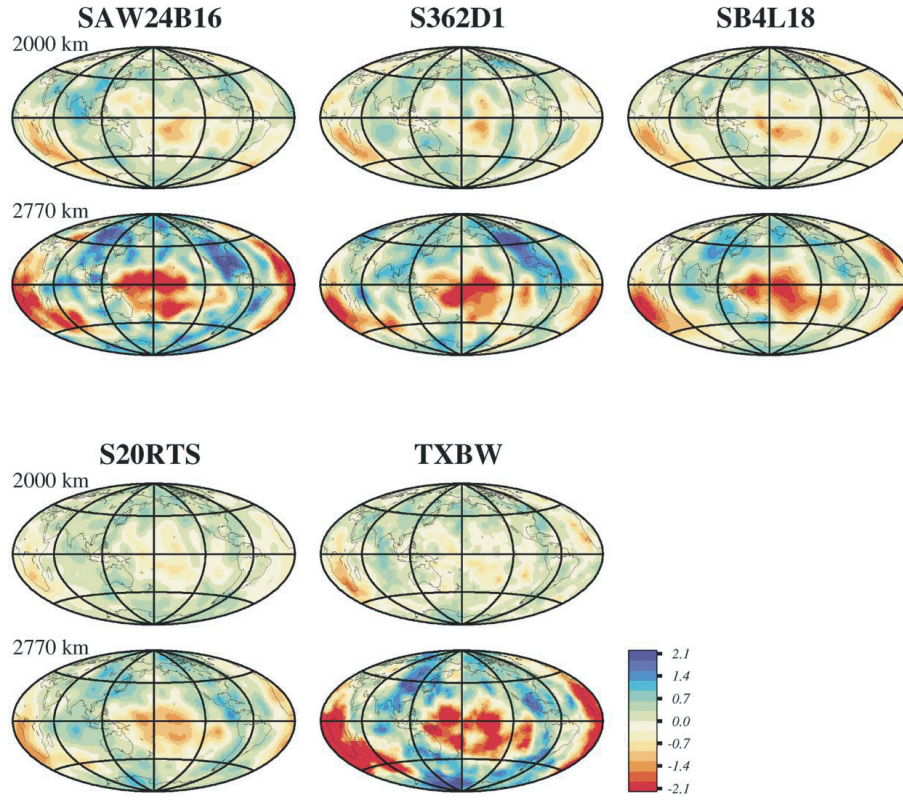


FIG. 1.2 – Comparaison des modèles de vitesse en onde S à 2000 km et 2770 km de profondeur (les vitesses sont exprimées en %) : SAW24B16 (Méglin et Romanowicz, 2000), S362D1 (Gu et al., 2001), SB4L18 (Masters et al., 1996), S20RTS (Ritsema et al., 1999), TXBW (Grand, 2002). D'après Romanowicz (2003)

Les deux fortes anomalies négatives sont associées à des superplumes dont l'extension verticale n'est pas encore clairement définie. La plupart des modèles montrent que ces anomalies s'enracinent au voisinage de la CMB. Par contre, il n'est pas évident que ces superplumes atteignent la zone de transition (figure 1.3). Dans certains modèles, l'anomalie sous l'Afrique semble confinée dans les 500 derniers kilomètres du manteau. De plus, il est possible que de petits panaches se développent au sommet de ces anomalies comme le suggèrent les études expérimentales de Davaille (1999). Pour imager ces plumes mantelliques, il faudrait une résolution plus fine des méthodes tomographiques.

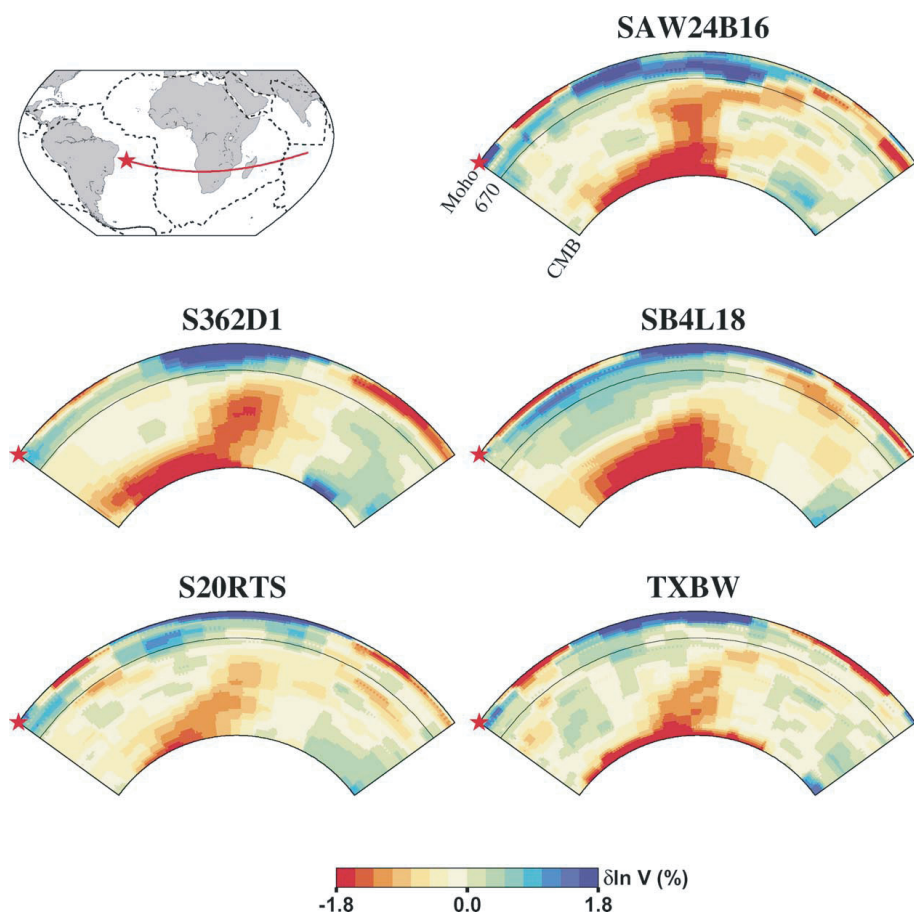


FIG. 1.3 – Coupe à travers la superplume africaine : comparaison entre différents modèles de vitesse d'onde S. D'après (Romanovicz, 2003).

Les modèles tomographiques montrent une image "lisse" de la structure des anomalies de vitesse. Cependant, l'analyse des formes d'onde suggère l'existence d'un fort gradient de vitesse en bordure du superpanache africain (Ni et al., 2005). Il est difficile d'expliquer de tels gradients de vitesse uniquement par des effets thermiques. Il semblerait donc que les anomalies de vitesse associées aux superplumes contiennent également une composante

chimique (Wyssession, 1996; Trampert et al., 2004).

Déterminer l'origine des hétérogénéités de vitesse est important pour interpréter les images tomographiques en termes de processus géodynamiques. Dans le manteau supérieur, on peut raisonnablement considérer que les petites anomalies de vitesse sismique reflètent principalement les anomalies thermiques. Par contre, quand la pression augmente, la sensibilité des vitesses sismiques aux anomalies thermiques décroît tandis que la sensibilité à la composition chimique augmente (Trampert et al., 2001). L'inversion conjointe de la vitesse des ondes P et des ondes S permet d'examiner par exemple les variations en profondeur du rapport  $R = \ln V_P / \ln V_S$  dont la valeur donne une indication sur la nature chimique ou thermique des anomalies. Romanowicz (2001) a montré que les valeurs de  $R$ , obtenues par inversion des modes propres, indiquent une contribution chimique aux anomalies de vitesse pour des profondeurs supérieures à 2000 km. Même avec la prise en compte des effets anharmoniques et anélastiques de la température sur les propriétés sismiques des roches, une origine purement thermique des anomalies ne permet pas d'expliquer ces fortes valeurs de  $R$  (Karato et Karki, 2001). En utilisant une méthode probabiliste (prenant en compte tous les modèles compatibles avec les données), Trampert et al. (2004) ont montré que les superplumes sous l'Afrique et le Pacifique présentent une signature chimique avec une augmentation de la densité engendrée par un enrichissement en fer et en perovskite.

La base du manteau, la couche D'', semble jouer un rôle capital dans la dynamique globale de la Terre, en tant que couche limite thermique et chimique. Cependant, les images tomographiques donnent principalement les anomalies de grande longueur d'onde au voisinage de la CMB. Mais on sait que la structure de la couche D'' est probablement très complexe avec des hétérogénéités à courtes et grandes longueurs d'onde (Wyssession, 1996; Hedlin et al., 1997).

### 1.1.2 La couche D''

On appelle couche D'' les 200 à 300 km situés au-dessus de la CMB. Il est indispensable de connaître sa structure si on souhaite mieux comprendre des processus tels que la convection mantellique, la naissance des points chauds, le refroidissement du noyau ou encore les variations séculaires du champ magnétique. La couche D'' est une couche limite thermique qui engendre des instabilités à l'origine de la formation des plumes mantelliques. Le contraste de température dans la couche D'' est de l'ordre de  $1000 \pm 1000$  K (Boehler, 1996; Williams, 1998). Ce fort gradient dépend du flux de chaleur en provenance du

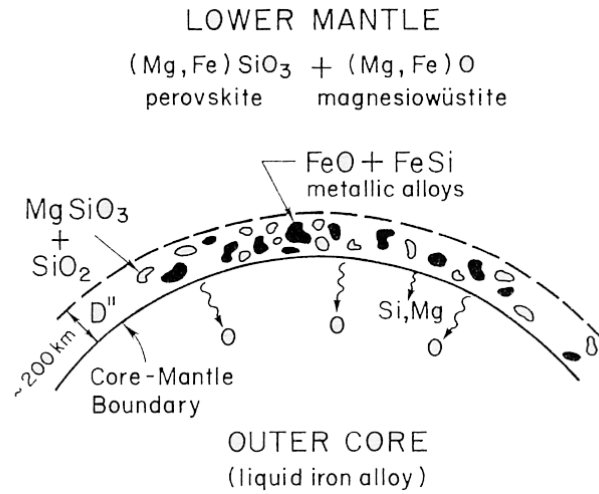


FIG. 1.4 – Interactions entre le manteau et le noyau dans la couche D'', d'après Jeanloz (1990). Les études expérimentales montrent que le fer liquide réagit fortement avec la pérovskite et les autres oxydes ou silicates du manteau. Les composants du manteau tels que l'oxygène mais aussi la silice et le magnésium migrent dans le noyau liquide. Ces réactions chimiques sont susceptibles de générer des hétérogénéités de vitesses similaires à celles observées dans la couche D''. Les propriétés thermiques, chimiques et électriques de la couche D'', résultant de l'interaction entre les silicates du manteau et l'alliage de fer du noyau, pourraient éventuellement influencer le champ magnétique observé en surface.

noyau et de la conductivité thermique des matériaux. La température maximale à la CMB est de l'ordre de  $4500 \pm 1000$  K. Cette température élevée peut favoriser les interactions chimiques (figure 1.4). En effet, des études expérimentales ont montré que les alliages de fer liquide pouvaient réagir fortement avec les oxydes et les silicates du manteau (Jeanloz, 1990; Knittle et Jeanloz, 1991; Goarant et al., 1992). La couche D'' constitue aussi une couche limite chimique résultant de la différenciation initiale du manteau terrestre, de l'accumulation de résidus de croûte subductée, ou encore des interactions chimiques entre les roches silicatées et le fer du noyau.

Le nombre croissant de données et l'amélioration des techniques d'analyse ont mis en évidence la complexité de la structure de la couche D''. L'examen des formes d'onde et des temps de propagation des ondes de volume apporte différents types d'informations sur sa structure. Les principales phases utilisées pour étudier la couche D'' sont résumées sur la figure 1.5. Initialement, on a plutôt cherché à déterminer la structure de vitesse moyenne de la couche D'', et les modèles obtenus présentent soit un gradient de vitesse légèrement



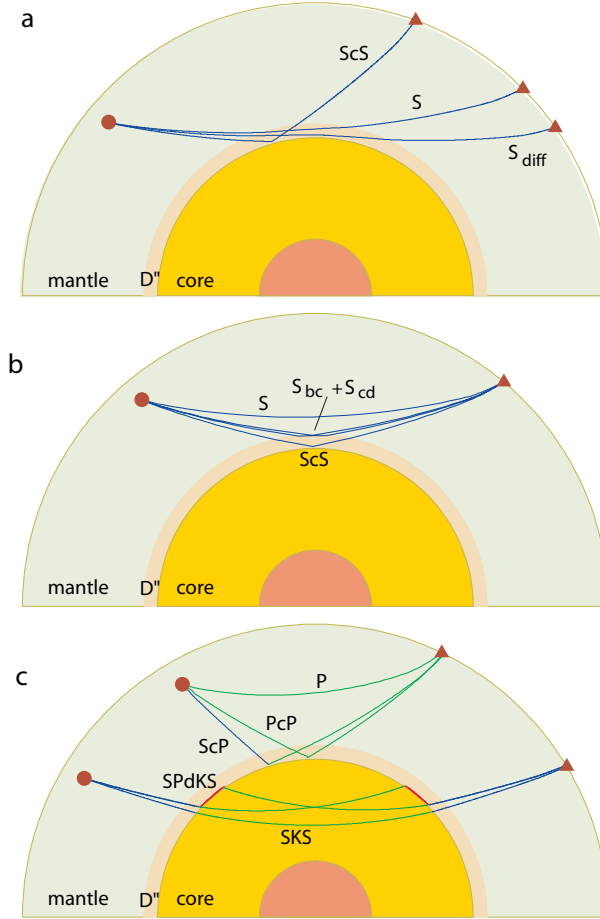


FIG. 1.5 – D’après Lay et al. (1998a) : exemples de phases utilisées pour étudier les différentes structures de la couche D''. (a) Phases ayant une incidence rasante au voisinage de la CMB : la phase directe S autour de  $90^\circ$  de distance épacentrale, la phase ScS réfléchie à la CMB et la phase diffractée  $S_{diff}$ . On peut également utiliser les phases P équivalentes. Ces phases ont une bonne sensibilité aux anomalies latérales de vitesse et à l’anisotropie sismique. (b) Phases associées à une triPLICATION engendrée par une discontinuité de vitesse au sommet de la couche D'', avec une phase réfléchie  $S_{bc}$  (aussi notée SdS) et une phase réfractée  $S_{cd}$ . Les phases P équivalentes sont également utilisées. Elles permettent d’étudier plus particulièrement la discontinuité de vitesse. (c) Phases principalement utilisées pour l’étude de la ULVZ (Ultra Low Velocity Zone), auxquelles on peut ajouter les ondes  $P_{diff}$ ,  $S_{diff}$  et PKP.

négatif, soit légèrement positif (Wyssession et al., 1998). Des variations latérales et en profondeur de la structure de la couche D'' ont ensuite été mises en évidence.

### **Une discontinuité de vitesse au sommet de la couche D''**

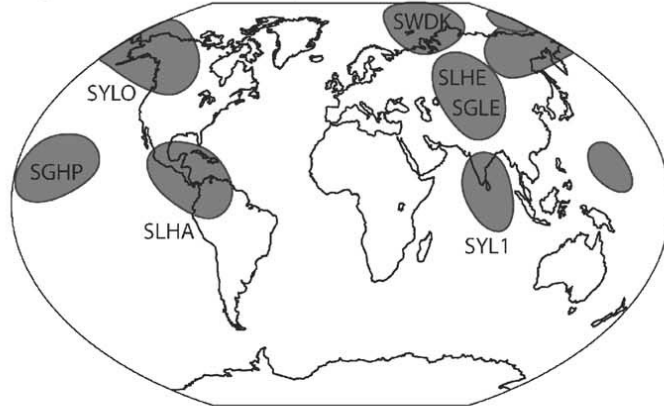
L'hypothèse d'une discontinuité de vitesse au sommet de la couche D'' a été proposée pour expliquer la triPLICATION de l'hodochrone des ondes S pour les distances épacentrales au voisinage de 80° (Lay et Helmberger, 1983b,a). Des réflexions sur cette discontinuité ont été également observées avec les ondes P (Houard et Nataf, 1993) même si elles sont moins fréquentes que pour les ondes S (ce qui suggère que le contraste de vitesse pourrait être moins important pour les ondes P que pour les ondes S). Le contraste de vitesse est de l'ordre de 1.5-3% à environ  $250 \pm 100$  km de la CMB mais sa position radiale varie latéralement (Kendall et Shearer, 1994). Cette discontinuité n'est pas toujours présente pour les deux types d'onde et est souvent absente (figure 1.6a) (Wyssession et al., 1998). L'hypothèse la plus probable à l'heure actuelle est la présence d'une transition de phase (Sidorin et al., 1999) que nous présenterons ultérieurement.

### **Une zone de très faible vitesse**

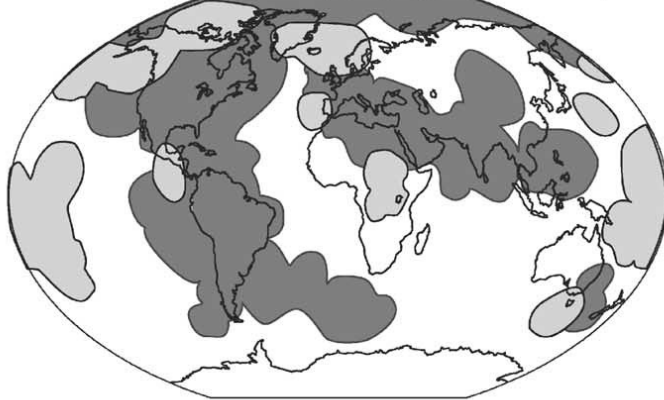
La présence d'une "fine" couche de quelques dizaines de kilomètres d'épaisseur à la base du manteau caractérisée par des vitesses anormalement lentes a été détectée lors de l'analyse de différents types de données.

L'étude du paramètre de rai apparent des ondes  $P_{diff}$  montre une diminution moyenne de la vitesse des ondes P de 4% environ par rapport au modèle de référence (Sylvander et al., 1997). Cependant, cette décroissance n'a pas été observée à l'échelle globale et présente de fortes variations régionales. Afin d'améliorer la résolution latérale, d'autres phases sont utilisées comme par exemple les phases S et P du noyau : SKS, SmKS (m réflexion sur la face interne de la CMB), SPdKS (onde SKS présentant un segment d'onde P diffractée à la CMB) (Garnero et Helmberger, 1995, 1996; Garnero et Jeanloz, 2000), PKP (Sylvander et Souriau, 1996). Enfin, les précurseurs des phases réfléchies PcP et ScP ou des ondes PKP ont également été exploités pour contraindre les propriétés de cette zone de faible vitesse (Mori et Helmberger, 1995; Wen et Helmberger, 1998; Vidale et Hedlin, 1998; Garnero et Vidale, 1998). Cette couche, appelée ULVZ (pour Ultra Low Velocity Zone), présenterait une diminution de vitesse de 10 à 20% (cette diminution pourrait atteindre 50% pour les ondes S) sur une épaisseur de 5 à environ 50 km (Garnero et Helmberger, 1995, 1996; Garnero et al., 1998; Garnero et Jeanloz, 2000). 50% de la

(a) Regional D" shear velocity discontinuity detections



(b) Detectable ULVZ presence (light gray) and absence (dark gray)



(c) D" anisotropy detections (dark gray) and absence (light gray)

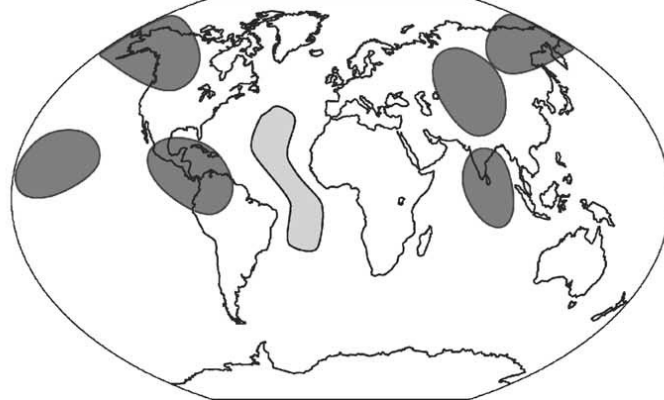


FIG. 1.6 – D'après Lay et al. (2004) : Répartition spatiale des principales caractéristiques sismiques de la couche D". (a) Régions présentant une discontinuité de la vitesse des ondes S. (b) Régions où la ULVZ a été détectée (gris clair) et où elle est absente (gris foncé). (c) Régions présentant une anisotropie pour les ondes S (gris foncé) et régions isotropes (gris clair).

surface de la CMB a été ainsi examinée (figure 1.6b), et la ULVZ n’a été observée que sur environ 15% de ces régions (Garnero et Jeanloz, 2000). La zone de moindre vitesse semble plus épaisse dans les régions où le manteau inférieur est plus lent. De larges extensions de la ULVZ ont été détectées sous l’Afrique, l’Islande, l’Alaska et la partie centrale de l’Océan Pacifique. Cependant, cette corrélation n’est pas toujours évidente (Sylvander et al., 1997; Lay et al., 1998a). Sous le Pacifique par exemple, la ULVZ semble présenter de fortes variations latérales de son épaisseur qui sont au-delà des limites de résolution des tomographies actuelles. De même, l’étude des précurseurs des ondes ScP a récemment mis en évidence des structures très lentes de taille de l’ordre de 50 km sous l’Australie (Rost et al., 2005). Par ailleurs, il existe une certaine corrélation entre la localisation des points chauds et celle de la ULVZ (Williams et al., 1998).

Différentes interprétations de l’origine de la ULVZ sont possibles. On attribue le plus souvent l’existence de cette couche de faible vitesse à la présence de fusion partielle (Williams et Garnero, 1996; Wen et Helmberger, 1998; Vidale et Hedlin, 1998; Stutzmann et al., 2000). La composition chimique de ce fluide et son origine ne sont pas clairement définis. Des interactions chimiques avec le noyau liquide pourraient générer une discontinuité chimique à la base du manteau, résultant de la percolation de matériaux en provenance du noyau (Garnero et Jeanloz, 2000; Knittle et Jeanloz, 1991). Pour expliquer les observations sismologiques, Garnero et Jeanloz (2000) proposent également l’existence, juste au-dessous de la CMB, d’une couche rigide de 1 à 3 km d’épaisseur issue de la cristallisation du noyau liquide.

## **Des hétérogénéités de courtes longueurs d’onde**

Les précurseurs des ondes PKIKP (les ondes P qui se propagent dans la graine solide) sont expliqués par la présence d’hétérogénéités au voisinage de la CMB (Cleary et Haddon, 1972), dont la taille serait de l’ordre de 10 à 100 km avec un contraste de vitesse de 1% (Hedlin et al., 1997; Hedlin et Shearer, 2000). Il est cependant difficile de séparer les effets de diffusion par une topographie de la CMB des effets de diffusion par des hétérogénéités.

## **De l’anisotropie sismique**

Vinnik et al. (1989), à partir de l’analyse de la polarisation des ondes S diffractée, ont proposé pour la première fois la présence d’anisotropie dans la couche D”. Cette observation a été confirmée ultérieurement, et la présence d’anisotropie dans la couche D” est compatible avec une symétrie hexagonale présentant une direction rapide verticale

ou horizontale selon les endroits (Maupin, 1994; Kendall et Silver, 1996). Cependant, cette anisotropie est encore mal contrainte en raison d’une mauvaise couverture azimutale dans certaines régions et de la superposition de l’effet des hétérogénéités de vitesse (Vinnik et al., 1995). Par ailleurs, elle n’est pas observée partout (figure 1.6c) et l’épaisseur de cette couche anisotrope semble variable. Sous le Pacifique par exemple, l’anisotropie semble confinée dans les 100 derniers kilomètres de la D”, mais il pourrait également exister une couche anisotrope au sommet de la D”, sous la discontinuité (Rokosky et al., 2004).

A grande échelle, la vitesse des ondes S polarisées verticalement est généralement plus faible que la vitesse des ondes S polarisée horizontalement suggérant des mouvements horizontaux importants (Panning et Romanowicz, 2004). Cependant, au niveau des régions présentant de fortes anomalies négatives de vitesse (généralement décrites comme des superplumes), la vitesse des ondes polarisées verticalement est supérieure à celle des ondes polarisées horizontalement : il y aurait donc un basculement de l’axe de symétrie (Panning et Romanowicz, 2004; Wookery et al., 2005). La présence de courants montant ou descendant à la base du manteau induit de fortes contraintes cisailantes au voisinage de la CMB (Yamazaki et Karato, 2002) qui pourraient être à l’origine des variations d’anisotropie observées. A une échelle plus locale, sous les Caraïbes, Garnero et al. (2004) ont montré que les données étaient compatibles avec une texture présentant un axe de symétrie incliné d’environ 20° par rapport à la verticale.

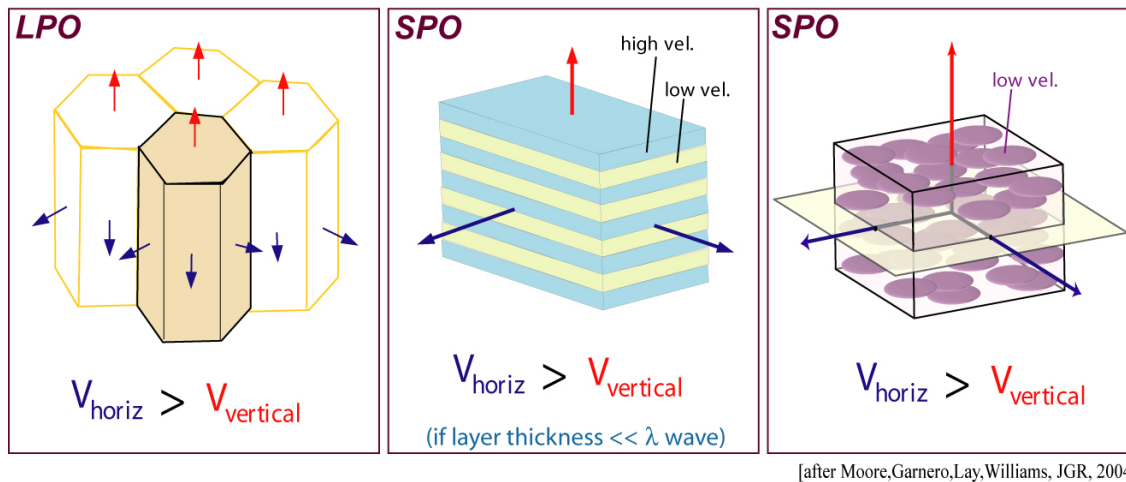


FIG. 1.7 – Origine possible de l’anisotropie sismique dans la couche D” (E. Garnero) : (gauche) Orientation préférentielle de réseau d’un composé présentant un axe de symétrie vertical, (milieu) structure en couches ou laminaires, (droite) orientation d’inclusion fluide.

L’anisotropie de la couche D” pourrait être associée à la présence de structure lami-

naires, à l'orientation d'inclusions fluides, ou à l'orientation préférentielle d'un matériau présentant une structure anisotrope (figure 1.7). L'anisotropie transverse semble associée aux régions présentant des anomalies de vitesse positives une accumulation de matériaux subductés jusque dans la couche D'' (Kendall et Silver, 1996; Lay et al., 1998b; McNamara et al., 2002; Garnero et Lay, 2003). Cependant, la récente découverte d'une transition de phase perovskite→ post-perovskite (Murakami et al., 2004) pourrait expliquer la présence d'anisotropie sismique à cette profondeur.

## La transition de phase

La pérovskite  $MgSiO_3$  est le minéral le plus abondant de la planète. Cependant, les calculs théoriques et les expérimentations en laboratoire (Murakami et al., 2004; Oganov et Ono, 2004; Tsuchiya et al., 2004b) ont montré l'existence d'une transition de phase de la pérovskite aux conditions thermodynamiques de la couche D'' (à 250 GPa et 2500 K, soit une profondeur de 2700 km). Ce changement de phase serait également caractérisé par une augmentation de densité de 1.0 à 1.2%. La pente de Clapeyron est de l'ordre de 5-10 MPa/K (Tsuchiya et al., 2004b).

Expérimentalement, selon le standard de mesure utilisé, la pression du changement de phase peut varier de 15 GPa. De la même façon, la méthode employée pour les calculs théoriques engendre des variations de cette pression de 10 à 20 GPa (Oganov et Ono, 2004; Tsuchiya et al., 2004a). Si la discontinuité au sommet de la couche D'' est associée à ce changement de phase, alors il existe une incertitude sur sa localisation en profondeur. Les sauts de vitesse en ondes P et S observés sont en bon accord avec les prédictions de la physique des matériaux (Tsuchiya et al., 2004a; Oganov et Ono, 2004). Ce saut de vitesse serait plus important pour les ondes S que pour les ondes P, expliquant pourquoi les ondes SdS sont plus facilement observées que les ondes PdP. Lay et al. (2004) soulignent que la discontinuité disparaît dans les régions caractérisées par des mouvements ascendants. Or, cette transition de phase est exothermique avec une pente de Clapeyron positive. Ainsi, au niveau d'un courant montant chaud, la température est plus forte et la pression doit être plus grande pour que le changement de phase se produise : la discontinuité sera à plus grande profondeur. Une autre hypothèse est proposée pour expliquer l'observation intermittente de la discontinuité : en fonction du gradient adiabatique dans le manteau associé au fort gradient de température dans la couche D'', on peut envisager un double passage à travers la transition de phase (Hernlund et al., 2005).

La phase post-perovskite est très anisotrope (figure 1.8). L'anisotropie de la post-

perovskite est 50% supérieure à celle de la perovskite d'où la possibilité pour D'' d'acquies une anisotropie plus forte que celle du manteau inférieur. Les calculs théoriques sur les propriétés élastiques de la post-perovskite, effectués pour l'instant à 0 K, prévoient une anisotropie azimutale plus importante pour les ondes S que pour les ondes P (Tsuchiya et al., 2004a). Par ailleurs, un faible degré d'orientation préférentielle de la post-perovskite serait nécessaire pour expliquer l'anisotropie dans la couche D'' et serait en mesure d'expliquer l'inclinaison de l'axe observée dans certaines régions (Oganov et al., 2005).

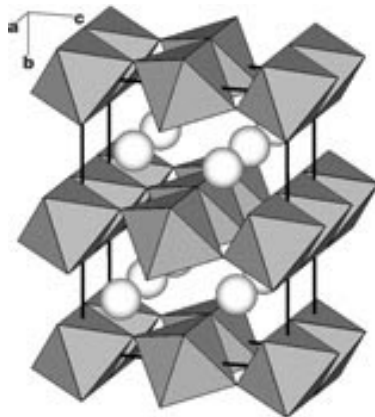


FIG. 1.8 – D'après Oganov et Ono (2004) : structure de la phase post-perovskite de  $MgSiO_3$ .

L'existence d'une transition de phase dans la couche D'' peut avoir des conséquences sur la convection du manteau (Nakagawa, 2004). Le caractère exothermique de cette transition favorise le développement d'instabilités thermiques de petite taille dans la couche D''. La présence d'une transition de phase ne serait donc pas favorable à la formation de superplumes. Ainsi, Schubert et al. (2004) proposent une structure en "bouquets" de plumes sous l'Afrique ou le Pacifique au lieu d'un superpanache. Cependant, la résolution des images tomographiques doit être sérieusement augmentée pour pouvoir confirmer cette hypothèse. Enfin, une transition de phase exothermique favoriserait une augmentation du flux de chaleur à travers la couche D'' conduisant à un refroidissement plus rapide du noyau. Ainsi, la vitesse de croissance de la graine étant fonction de ce flux de chaleur (Labrosse et al., 1997), la graine a pu atteindre sa taille actuelle plus rapidement. Par ailleurs, on sait que la graine influence la géodynamo terrestre et joue un rôle important dans la stabilisation du champ magnétique terrestre (Labrosse et Macouin, 2003).

## Des interrogations

Au cours de ces vingt dernières années, l'image de la couche D'' s'est affinée mais paraît aujourd'hui extrêmement complexe. Les principales structures telles que la discontinuité de vitesse, la ULVZ et la couche anisotrope ne sont pas toujours observées et dépendent du contexte géodynamique (figure 1.9).

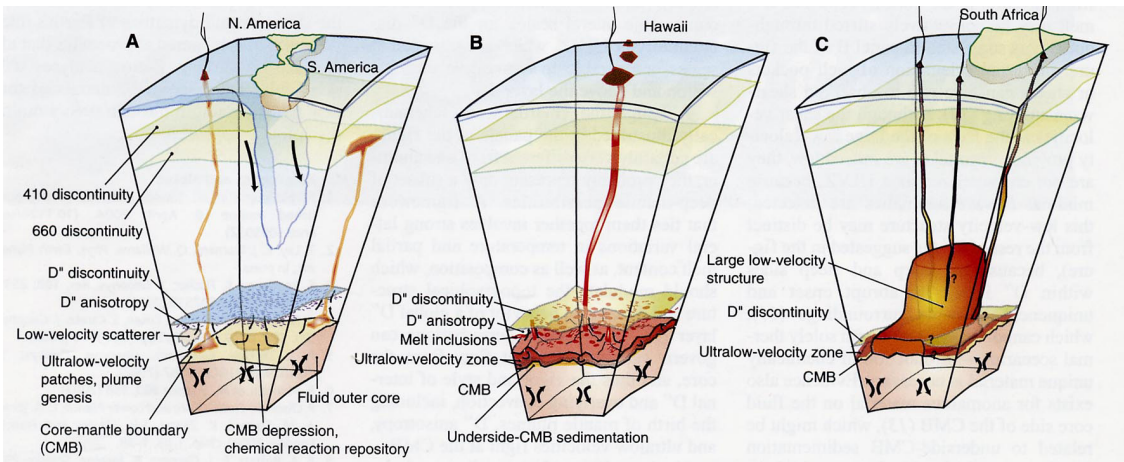


FIG. 1.9 – D'après Garnero (2004) : complexité de la structure de la couche D'' : (a) sous l'Amérique Centrale, (b) au centre du Pacifique, (c) sous l'Atlantique Sud et l'Afrique du Sud.

La découverte de la transition de phase de la pérovskite dans la couche D'' a éclairé d'un jour nouveau nombre d'observations sismologiques (Hirose et al., 2006). Cependant, la perovskite et la post-perovskite semblent coexister sur une certaine gamme de pression : ce domaine, qu'il faudrait contraindre, est fonction de la composition chimique. Par ailleurs, si le caractère exothermique de la transition de phase permet d'expliquer les variations d'épaisseur de la couche D'' à grande longueur d'onde, elle ne permet pas d'expliquer les variations latérales de quelques dizaines de kilomètres.

Le changement de phase, associé à des hétérogénéités thermiques, peut induire un changement des propriétés rhéologiques et de la conductivité thermique dans la couche D'' affectant la stabilité dynamique de la couche D''. Contraindre ces effets permettrait de mieux comprendre l'histoire thermique, chimique et dynamique de la Terre ainsi que le rôle joué par la couche D''.



### 1.1.3 L'utilisation des noyaux de sensibilité

Certaines structures dans le manteau inférieur sont au-delà de la limite de résolution des méthodes de tomographie exposées précédemment : structure du sommet de la superplume africaine (structure en "panache de plumes"?) et de ses bords, origine en profondeur des plumes mantelliques, épaisseur de la discontinuité de vitesse au sommet de la couche D", hétérogénéités de petite taille dans la couche D", etc ... La résolution des modèles tomographiques est tout d'abord limitée par un échantillonnage inhomogène du manteau terrestre par les ondes sismiques, mais aussi par la paramétrisation des modèles et le volume de Fresnel des ondes utilisées. En effet, dans un milieu homogène, la largeur maximale  $w_m$  de la zone de Fresnel dépend à la fois du contenu fréquentiel et de la distance parcourue (Nolet, 1987) :

$$w_m = \sqrt{\frac{\lambda L}{2}} \quad (1.1)$$

où  $\lambda$  est la longueur d'onde caractéristique et  $L$  la longueur du rai entre la source et le récepteur. Pour une onde P qui se propage dans le manteau inférieur et pour une fréquence de 1 Hz, cette largeur peut atteindre 200 km. Pour une onde  $P_{diff}$ , la zone de Fresnel peut s'étaler sur plus de  $\sim 1000$  km. Ainsi, prendre en compte le volume de Fresnel des ondes de volume pourrait apporter un gain en résolution.

Récemment, on a essayé de prendre en compte les effets de fréquence finie dans les études tomographiques. La théorie des noyaux de sensibilité (voir chapitre 3) considère le contenu fréquentiel des ondes sismiques et décrit comment l'onde échantillonne le milieu au sein de cette zone de Fresnel. Karason et van der Hilst (2001) ont utilisé des noyaux de sensibilité pour les ondes PKP(DF) et  $P_{diff}$ , calculés par une méthode de sommation de modes (Zhao et al., 2000), afin de décrire plus précisément la distribution de la sensibilité de ces ondes aux hétérogénéités de vitesse dans le manteau inférieur. En tomographie sismique, l'utilisation des phases du noyau améliore la résolution dans le manteau inférieur (Karason et van der Hilst, 2001) et la phase  $P_{diff}$ , qui a une incidence rasante à la CMB, permet de mieux contraindre les variations latérales de vitesse (Wyssession, 1996; Valenzuela et Wyssession, 1998). Cependant, pour limiter les difficultés numériques, en particulier pour la phase  $P_{diff}$ , les calculs des noyaux de sensibilité ont été réalisés à très basse fréquence (50 mHz) et avec un nombre limité de modes. Par ailleurs, les noyaux différentiels PKP(DF)- $P_{diff}$  ont été calculés pour trois distances épicentrales, puis une loi d'échelle a été appliquée pour couvrir la gamme de distance épicentrale des données. Les tests de résolution ont permis de conclure que l'utilisation

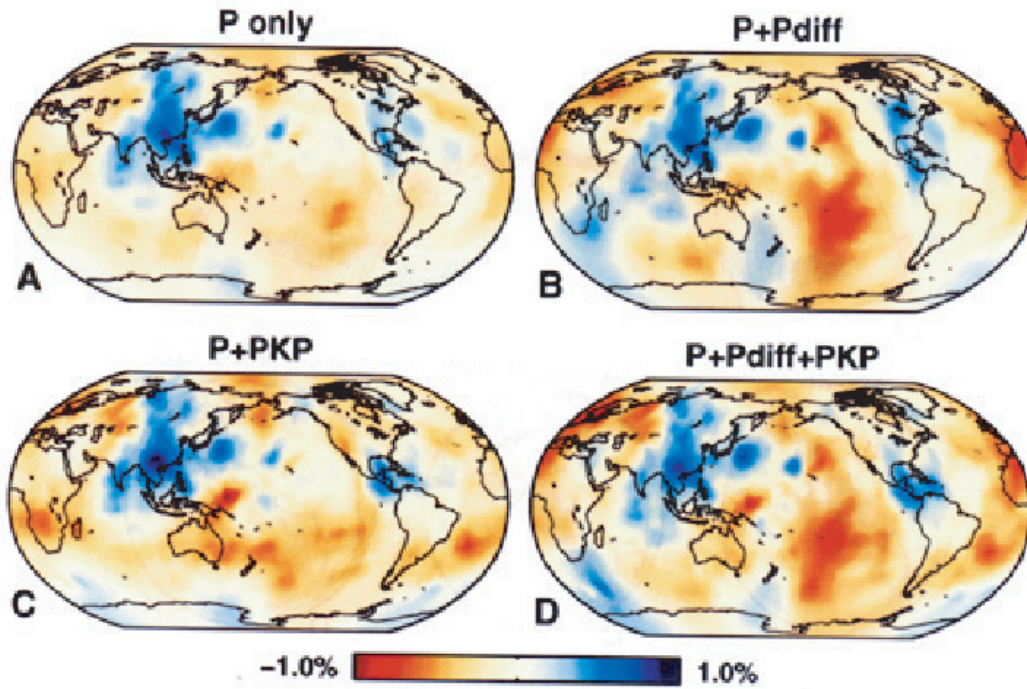


FIG. 1.10 – Modèles en vitesse d’onde P du manteau terrestre : résultats de l’inversion de différents jeux de données pour une profondeur de 2819 km. (a) Données P du fichier EHB; (b) Données P du fichier EHB et 543 enregistrements longue période (50 mHz) de  $P_{diff}$ ; (c) Données P et PKP du fichier EHB ainsi que 1383 enregistrements courte période; (d) Ensemble des données. D’après Karason et van der Hilst (2001).

des données PKP(AB)-PKP(DF), PKP(AB)-PKP(BC) ainsi que PKP(DF)- $P_{diff}$  permet d’améliorer la résolution des structures de grande longueur d’onde à des profondeurs supérieures à 2200 km (figure 1.10). Si cette étude a utilisé des noyaux de sensibilité pour la tomographie du manteau profond, elle n’a pas vraiment exploité toute la potentialité des noyaux de sensibilité car ceux-ci ont été calculés à très basse fréquence et sans connaître le contenu fréquentiel des données utilisées pour l’inversion (utilisation du fichier EHB (Engdahl et al., 1998)). Par ailleurs, le traitement des données en rais résumés réduit la résolution des structures de petite longueur d’onde.

Montelli et al. (2004b) comparent les résultats d’une tomographie dans le cadre de la théorie des rais et dans le cadre de la théorie de fréquence finie développée par Dahlen et al. (2000) (figure 1.11). Les noyaux de sensibilité pour les ondes P (de période dominante de 20 s) et pour les temps différentiels PP-P sont calculés pour environ 90000 données en utilisant la méthode décrite par Dahlen et al. (2000). En fonction de la taille et de la profondeur des anomalies, les amplitudes des perturbations de vitesse obtenues lors de

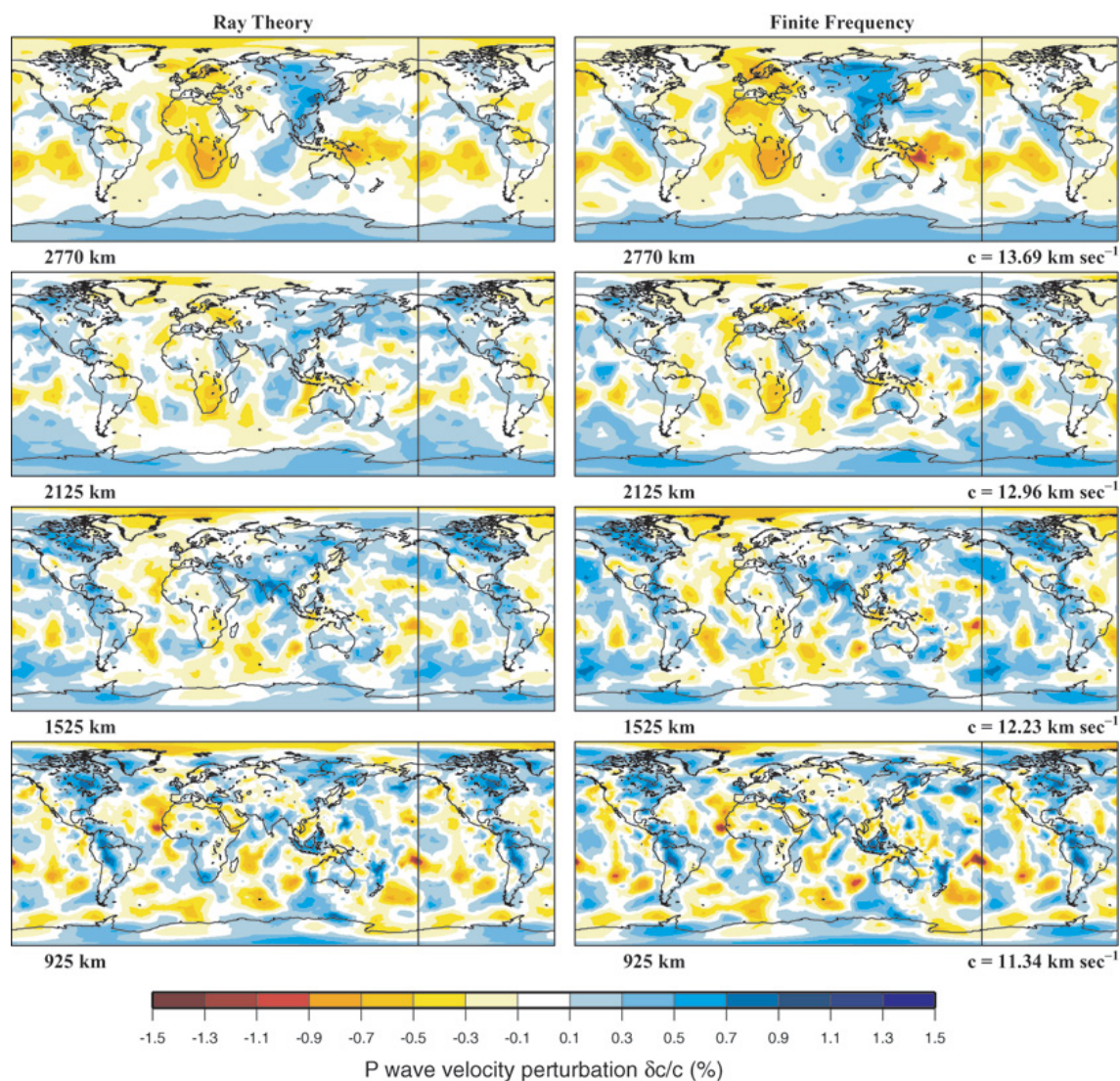


FIG. 1.11 – Comparaison entre une inversion avec la théorie des rais (gauche) et avec les noyaux de sensibilité (droite) pour 4 profondeurs (Montelli et al., 2004b). À grande profondeur, l'amplitude des perturbations de vitesse obtenue avec les noyaux de sensibilité est supérieure à celle obtenue avec la théorie des rais.

l'inversion avec les noyaux de sensibilité sont 30 à 50% plus fortes que pour les inversions avec la théorie des rais. La tomographie à fréquence finie permettrait de mettre en évidence des anomalies trop faibles pour être détectées avec la théorie des rais. Par ailleurs, cette étude a également montré qu'il était possible, même avec des zones de Fresnel de l'ordre de 1000 km de large de résoudre des structures telles que les plumes mantelliques (figure 1.12). Certaines plumes semblent s'enraciner à la base du manteau comme les points chauds des Azores et de Tahiti. Les plumes de Tahiti et de Samoa semblent émerger du superpanache du Pacifique. Par contre, d'autres ne sont imagées que dans la partie supérieure du manteau terrestre tel que l'Islande, suggérant que la convection dans le manteau pourrait être partiellement séparée en deux régimes ou qu'il s'agit d'une plume en fin de vie (Davaille et Vatteville, 2004)... Cette étude à fréquence finie montre que la théorie des noyaux de sensibilité pourrait apporter un gain de résolution dans les études tomographiques, à condition qu'elle soit associée à une méthode de mesure par cross-corrélation de la perturbation du temps de propagation et du contenu fréquentiel des ondes. Par la suite, cette technique a été mise en oeuvre pour des tomographies isotropes du manteau supérieur (Hung et al., 2004) et anisotropes de la lithosphère (Favier, 2004).

Cependant, Montelli et al. (2004a) soulignent que la structure des plumes mantelliques en profondeur n'est pas toujours clairement résolue compte tenu des effets de régularisation qui peuvent "étaier" les anomalies horizontalement et verticalement, mais aussi du manque de résolution. Par ailleurs, la résolution des images tomographiques est avant tout limité par la couverture des données utilisées pour l'inversion. ainsi, les phases du noyau pourraient améliorer la résolution en profondeur de l'image tomographique à condition que la couverture sismique soit suffisante. Par ailleurs, les phases  $P_{diff}$ , outre leur sensibilité aux différentes structures de la couche D", permettent d'échantillonner des régions qui ne sont pas accessibles par les autres phases (Valenzuela et Wyssession, 1998). Les noyaux de sensibilité de ces phases peuvent donc s'avérer très utiles pour de futures tomographies du manteau. Dans cette thèse, j'ai développé l'expression des noyaux de sensibilité des ondes PKP selon la méthode de Dahlen et al. (2000) : la structure particulièrement complexe de ces noyaux surtout à la base du manteau laisse penser que les effets de fréquence finie ne seront pas négligeables. Nous proposerons dans le chapitre 6 une solution numérique pour le calcul des noyaux de sensibilité des ondes  $P_{diff}$ .



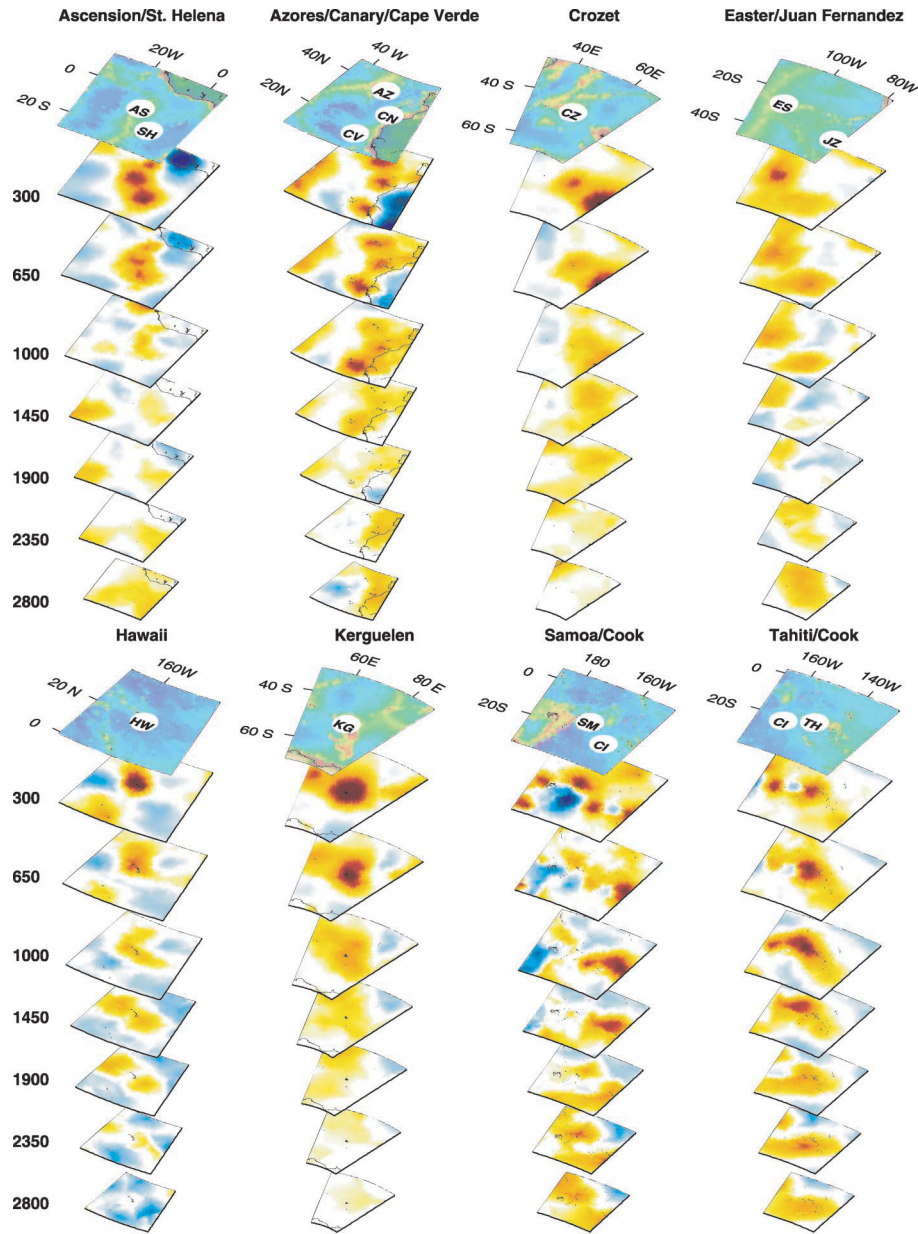


FIG. 1.12 – Structure des plumes imagées par Montelli et al. (2004a).

## 1.2 Le noyau terrestre

La sismologie a permis de préciser la structure de la Terre dès les premières décennies du XX<sup>e</sup> siècle. En 1906, R. D. Oldham remarque que l'amplitude des ondes P diminue rapidement au-delà de 100° de distance épicentrale. C'est la diminution de la vitesse des ondes sismiques qui crée une zone d'ombre : les ondes P disparaissent pour des distances angulaires situées entre 100° et 140°. Beno Gutenberg a été le premier à donner de

façon précise la profondeur du noyau, à 2900 km. Par la suite, en observant des ondes P dans cette zone d'ombre, Inge Lehmann a démontré l'existence d'une graine en 1936. Harold Jeffreys a proposé le premier, en 1926, une nature liquide pour le noyau à partir de l'étude des marées terrestres. Le caractère solide de la graine est mentionné dès 1946 par K. E. Bullen qui propose que le saut de vitesse au sommet de la graine résulte de la solidification d'un alliage de fer. La confirmation de la nature solide de la graine sera donnée par l'analyse des modes propres de vibration de la Terre (Dziewonski et Gilbert, 1971). Les propriétés sismiques du noyau terrestre sont fonction de celle du fer, principal composant chimique.

Après avoir abordé la nature physique et chimique du noyau terrestre, je n'exposerai que de façon succincte quelques aspects des études sismologiques menées sur le noyau terrestre. Je développerai davantage l'étude de l'anisotropie sismique de la graine.

### **1.2.1 Nature physique et chimique du noyau terrestre**

On considère généralement que le noyau est essentiellement constitué de fer. En 1952, Francis Birch établit une relation linéaire entre la vitesse des ondes P et la densité du milieu traversé. Ainsi, en utilisant les données sismologiques associées au noyau, il a montré que le noyau devait être essentiellement constitué de fer. En effet, on pense que l'abondance des différents éléments dans la Terre est proche de l'abondance cosmique. La Terre se serait formée à partir d'une nébuleuse primitive. Les gaz et les poussières de cette nébuleuse s'attirent mutuellement et se condensent. Au fur et à mesure de cette accrétion, des corps de plus en plus gros se sont formés pour finalement donner des proto-planètes. L'énergie gravitationnelle libérée est telle qu'elle aurait permis une fusion quasi-complète de la Terre et ensuite sa différenciation : les éléments plus légers ont migré vers l'extérieur (comme le silicium) en donnant le manteau, et les éléments plus fusibles et plus lourds comme le fer ont donné le noyau. Le noyau serait donc apparu au tout premier stade de la formation de la planète. La graine s'est formée à partir de la cristallisation du liquide lors du refroidissement du noyau. L'existence d'un champ magnétique terrestre est également favorable à une composition très riche en fer du noyau terrestre (Jeanloz, 1990). En effet, le mécanisme de géodynamo nécessite l'existence d'une région conductrice liquide dans la Terre étant donné que la fluidité et la conductivité électrique du manteau ne sont pas suffisantes pour créer et entretenir un champ magnétique. Ainsi, la conclusion que le fer est le principal composant du noyau terrestre est basée sur une combinaison de considérations géomagnétiques, sismologiques, cosmochimiques et d'expérimentations à haute pression.

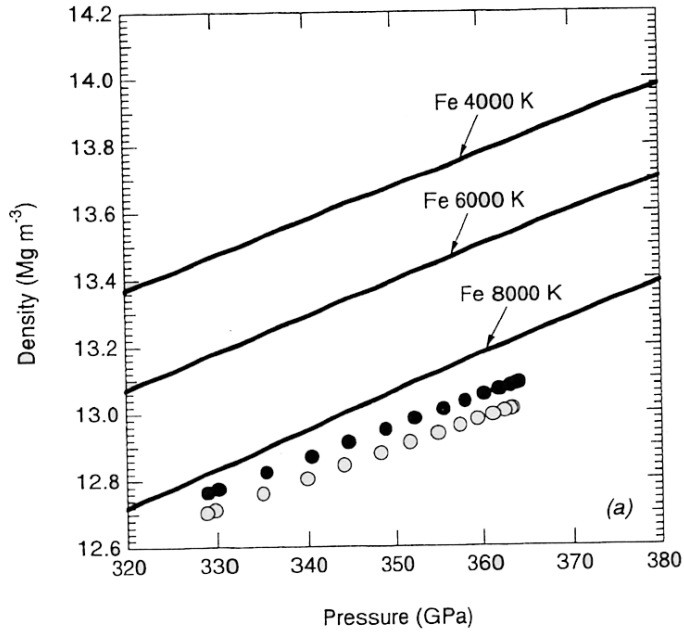


FIG. 1.13 – Densité du fer pur hexagonal en fonction de la température et de la pression (lignes) comparée à celle de la graine pour les modèles de Dziewonski et al. (1975) (cercles blancs) et Dziewonski et Anderson (1981) (cercles noirs). Les isothermes sont obtenues à partir d’une description *ab initio* de l’équation d’état du fer dans le cadre de la mécanique quantique. Plusieurs gammes de température sont explorées car les conditions thermodynamiques de la graine ne sont pas encore bien contraintes. D’après Stixrude et al. (1997).

Pourtant, un noyau essentiellement constitué de fer a une densité trop forte et une vitesse des ondes P trop faible (figure 1.13). La densité du noyau liquide est environ 10% plus faible que celle du fer aux conditions thermodynamiques du noyau (Jeanloz, 1979; Mao et al., 1990). La densité de la graine est 4 à 5% plus faible que celle du fer pur (Fiquet et al., 2001). Ce déficit de densité du noyau par rapport à l’alliage Fer-Nickel nécessite la présence d’éléments légers dans le noyau. Les mesures expérimentales de la vitesse des ondes S et P sont généralement extrapolées aux conditions thermodynamiques du noyau à l’aide de la loi de Birch. Cette loi linéaire n’est vraisemblablement plus valable à haute pression et haute température en présence d’éléments légers (Lin et al., 2005). Les principaux éléments légers présents dans le noyau sont le soufre, l’hydrogène, l’oxygène et le carbone. Leur quantité dépend de l’abondance initiale de ces éléments dans les matériaux accrétés, du modèle de formation et de différenciation de la Terre, des conditions d’oxydo-réduction du noyau et de l’existence ou non d’un équilibre chimique entre le noyau

et le manteau (Jeanloz, 1990; Poirier, 1994). Les paramètres thermiques, élastiques et de transport du noyau terrestre seront fonction de la concentration en éléments légers.

### 1.2.2 Exploration sismique du noyau terrestre

La sismologie dispose de différents type de données pour contraindre la structure du noyau. Les modes propres de vibration de la Terre permettent d’atteindre les variations à grandes longueurs d’onde de la densité, de la vitesse des ondes et de l’atténuation dans le noyau. Le profil de densité de la Terre est contraint par les modes propres de vibrations sphéroïdaux, la masse de la Terre et son moment principal d’inertie (Dziewonski et Anderson, 1981). L’utilisation des ondes de volume permet de contraindre les variations de la vitesse des ondes à plus courte longueur d’onde. Il existe plusieurs modèles de référence à symétrie sphérique tels que PREM (Dziewonski et Anderson, 1981), IASP91 (Kennett et Engdahl, 1991), SP6 (Morelli et Dziewonski, 1993) et ak135 (Kennett et al., 1995). Le modèle ak135 explique mieux le temps de propagation des ondes dans le noyau. Les différences entre ce modèle et les autres sont plutôt faibles excepté au voisinage de l’ICB. Dans cette thèse, nous utiliserons systématiquement le modèle ak135 (figure 1.14) pour calculer l’amplitude et le temps de propagation des ondes de volume.

#### Les phases du noyaux

On appelle phases du noyau les ondes qui traversent la CMB. Les principales phases qui se propagent en onde P dans le noyau liquide sont les ondes PKP (figure 1.15). Il existe deux phases dont le point le plus bas est dans le noyau liquide : la phase PKP(AB) qui se propage dans la partie supérieur du noyau liquide et la phase PKP(BC) qui se propage au voisinage de la graine. La présence de l’ICB (à une profondeur d’environ 5150 km), associée à une augmentation de vitesse, se traduit par une triplification de la phase PKP(BC) engendrant une phase réfléchiée appelée PKP(CD) et une phase transmise dans la graine nommée PKP(DF) (figure 1.16). La phase PKP(DF) est observée pour des distances allant de  $115^\circ$  à  $180^\circ$ , la phase PKP(AB) entre  $145^\circ$  et  $180^\circ$ , et la phase PKP(BC) est enregistrée dans une gamme de distances beaucoup plus restreinte, entre  $145^\circ$  et  $153^\circ$  (au-delà de cette distance, on enregistre la phase  $PKP_{Cdiff}$  qui est diffractée à l’ICB). Enfin la phase PKP(CD) totalement réfléchiée à la CMB est observée dans la gamme de distances  $115^\circ - 153^\circ$ . Ainsi, en fonction de la gamme de distances épicentrales, plusieurs de ces phases peuvent être enregistrées (figure 1.16). La phase DF est généralement atténuée par son passage dans la graine, contrairement aux phases AB et BC qui sont plus riches



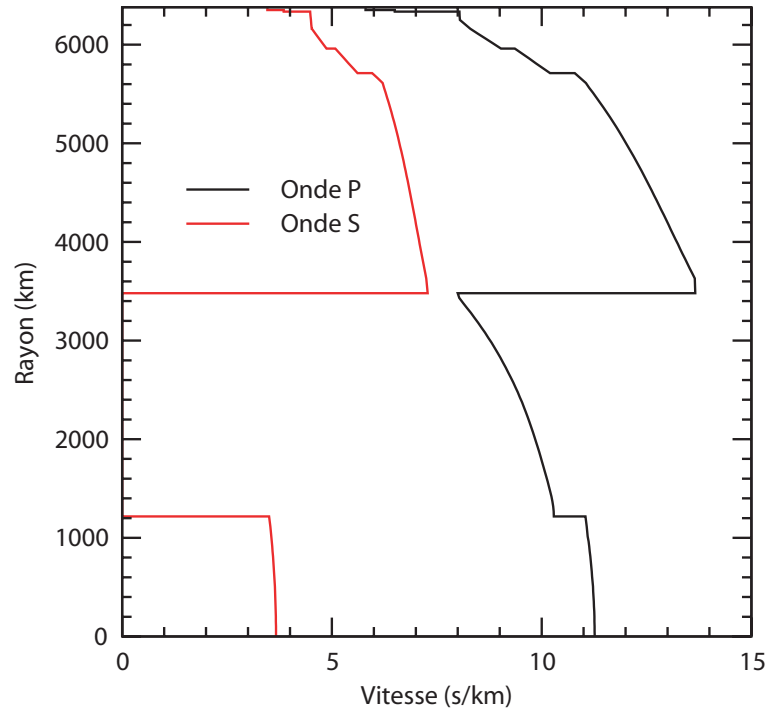


FIG. 1.14 – Modèles ak135 (Kennett et al., 1995) : variation de la vitesse des ondes P (noir) et des ondes S (rouge) en fonction du rayon.

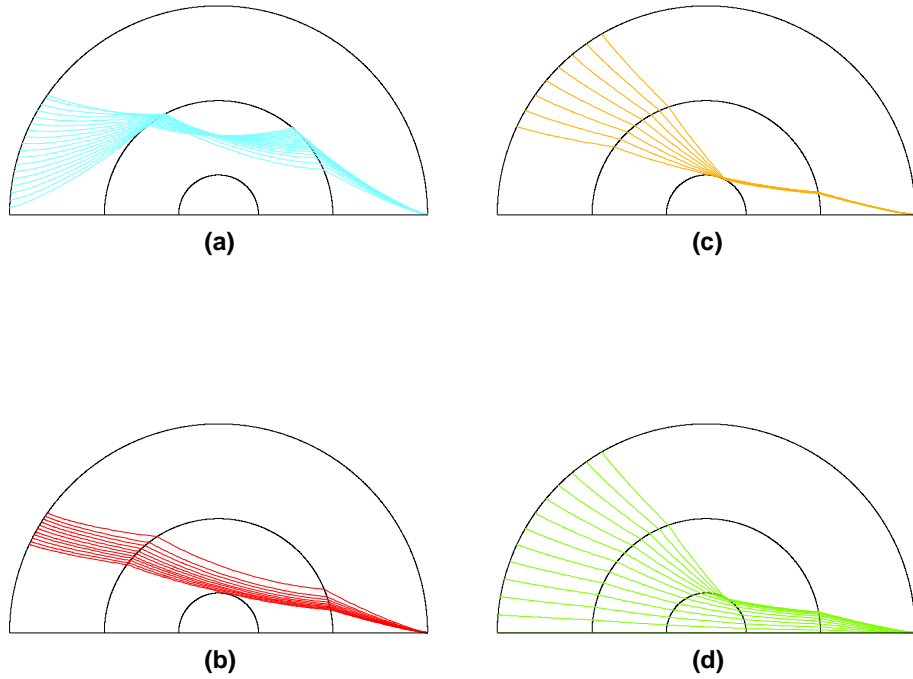


FIG. 1.15 – Les phases P du noyau : (a) PKP(AB), (b) PKP(BC), (c) PKP(CD), (d) PKP(DF). La trajectoire des ondes a été calculée dans le modèle ak135.

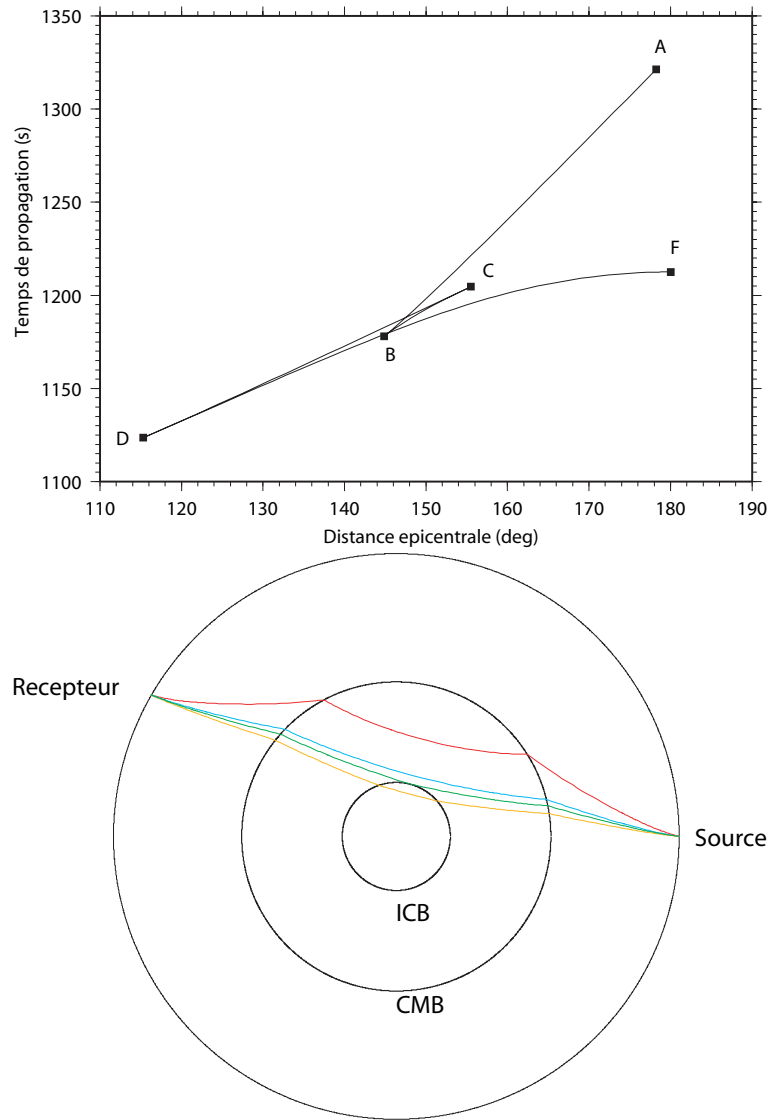


FIG. 1.16 – Les sauts de vitesse à la CMB et à l'ICB conduisent à la triPLICATION des phases PKP (gauche). Le temps de propagation a été calculé dans le modèle ak135. À une distance épicentrale de  $150^\circ$ , on enregistre les 4 phases PKP : la PKP(AB) (rouge), la PKP(BC) (bleu), la PKP(CD) (vert) et la PKP(DF) (orange).

en hautes fréquences. La forme d'onde de la phase AB correspond à la transformée de Hilbert de celle de la BC.

On peut donc utiliser les temps différentiels PKP(BC)-PKP(DF) entre  $145^\circ$  et  $155^\circ$ , et PKP(AB)-PKP(BC) entre  $150^\circ$  et  $180^\circ$ . La phase PKP(DF) permet d'étudier la structure de la graine et les temps différentiels présentent le principal avantage de s'affranchir des hétérogénéités au voisinage de la source et du récepteur et des erreurs d'horloge. En revanche, les trajectoires de ces ondes sont très différentes dans le manteau inférieur : la phase AB a une incidence très rasante à la CMB contrairement à la phase DF. Aussi, les temps différentiels sont très sensibles aux hétérogénéités de la couche D" (Sylvander et Souriau, 1996; Bréger et al., 1999, 2000). Par ailleurs, à courte distance épacentrale ( $<140^\circ$ ), la diffusion par des petites structures dans le manteau inférieur engendre des précurseurs aux ondes PKP(DF) (Haddon et Cleary, 1974). Les phases PKP(BC) diffractées et PKP(CD) sont intéressantes pour l'étude de l'ICB et de la partie inférieure du noyau liquide (Souriau et Poupinet, 1991a). Par contre, la présence d'une zone d'ombre rend plus difficile l'échantillonnage de la partie supérieure du noyau liquide. Il faut utiliser par exemple les phases PKmKP qui présentent des réflexions multiples sur la face interne de la CMB.

Les ondes PKP ne sont pas les seules phases qui permettent d'explorer le noyau terrestre. Les ondes SKS se propagent en onde S dans le manteau et en onde P dans le noyau liquide. La vitesse des ondes S étant de  $7.2 \text{ km.s}^{-1}$  dans le manteau inférieur et celle des ondes P de  $8.1 \text{ km.s}^{-1}$  dans le noyau liquide supérieur, les phases SKS et SmKS présentent un point-bas dans la partie supérieure du noyau liquide et sont des phases intéressantes pour l'étude du noyau liquide (Souriau et Poupinet, 1991b) et de la CMB. Par ailleurs, le fort contraste des propriétés sismiques entre le manteau et le noyau liquide permet également d'exploiter les phases réfléchies sur la CMB. La CMB est une limite solide-liquide et correspond donc à un fort réflecteur pour les ondes S : la composante SH d'une onde S incidente est donc totalement réfléchie tandis que le contraste d'impédance est beaucoup moins important pour les ondes P. Ainsi les phases PcP, ScS, ... sont des phases intéressantes pour examiner la topographie de la CMB.

## Quelques champs d'investigation

Dans ce paragraphe, nous exposerons brièvement quelques domaines de l'étude sismologique du noyau avant de revenir plus en détail sur l'anisotropie de la graine.

### La topographie de la CMB

La CMB constitue une importante limite physique et chimique séparant le manteau solide silicaté du noyau liquide essentiellement constitué de fer. Cette interface est une discontinuité du premier ordre pour les vitesses d'ondes P et S et pour la densité. Sa topographie a fait l'objet de nombreuses études sismologiques. La topographie de cette interface influence les mouvements dans le noyau liquide et constitue une condition limite pour les modèles de dynamo. Elle permet également un couplage entre le manteau et le noyau liquide qui intervient dans les modèles de nutation, de rotation et de précession de la Terre. Cependant, les modèles sismologiques de la topographie de la CMB sont variés et faiblement corrélés entre eux. Il est par ailleurs difficile de séparer les effets des hétérogénéités des effets de la topographie. L'amplitude de la topographie de la CMB est estimée entre  $\pm 4$  km et  $\pm 12$  km (voir Garcia (2001) pour une revue plus exhaustive).

#### La présence ou non d'hétérogénéité dans le noyau liquide

Le noyau liquide représente environ 16% du volume de la Terre. L'absence de propagation des ondes S dans cette région démontre la fluidité du noyau. Le noyau liquide est généralement reconnu comme homogène (Souriau et al., 2003b). Les 200 derniers kilomètres à la base du noyau liquide présenteraient une structure un peu plus complexe avec une diminution du gradient de vitesse (Souriau et Poupinet, 1991a). Ce gradient de vitesse pourrait être associé au processus de cristallisation de la graine à l'ICB.

#### L'anisotropie, l'atténuation et les hétérogénéités dans la graine (Pour une revue des différentes propriétés de la graine, voir Souriau et al. (2003a))

Une des principales caractéristiques de la graine est l'anisotropie de vitesse en onde P : les ondes qui se propagent selon l'axe de rotation de la Terre sont plus rapides que celles qui se propagent parallèlement au plan de l'équateur. Les caractéristiques principales de cette anisotropie sont un axe de symétrie rapide parallèle à l'axe de rotation de la Terre et un taux d'anisotropie de l'ordre de 3%. Cependant, la structure anisotrope de la graine présente des variations latérales et radiales. Une revue plus exhaustive des propriétés anisotropes de la graine est proposée dans la section 1.2.3 de ce chapitre.

L'existence d'une atténuation dans la graine apporte des informations sur son état thermique, sur ses propriétés de diffusion et suggère la possible présence de fusion partielle. En moyenne, dans les 500 premiers kilomètres de la graine, le facteur de qualité  $Q$  augmente avec la profondeur (Souriau et Roudil, 1995), avec une possible variation hémisphérique de  $Q$  sous l'ICB (Niu et Wen, 2001; Garcia, 2002). Par ailleurs, il semble exister une corrélation entre l'atténuation des ondes P et leur vitesse, puisque les trajets polaires plus rapides sont davantage atténués que les trajets équatoriaux plus lents (Souriau et Romanowicz, 1996). Cette anisotropie en atténuation apporte des contraintes

supplémentaires sur les modèles de formation de l'anisotropie de la graine (Bergman, 1997).

Le niveau d'hétérogénéité dans la graine est vraisemblablement inférieur à 0.3%. La modélisation des formes d'ondes PKIKP et PKiKP à courtes distances épicentrales a montré l'existence d'hétérogénéités dans les 50 premiers kilomètres de la graine avec des variations hémisphériques corrélées à celles de l'anisotropie (Niu et Wen, 2001; Garcia, 2002).

#### La rotation différentielle de la graine

La rotation de la graine a fait l'objet de nombreux débats, mais la plupart des études récentes sur la rotation différentielle de la graine convergent vers un taux de rotation au plus égal à  $0.2^\circ \cdot \text{an}^{-1}$  (Souriau et al., 2003a). Le problème des études sismologiques de la rotation de la graine est qu'elles doivent s'appuyer sur des données anciennes qui ne sont pas toujours de bonne qualité. Les modèles de dynamo prévoient une rotation différentielle de la graine par rapport au manteau (Glatzmaier et Roberts, 1996). Cependant, les anomalies de gravité engendrées par les hétérogénéités du manteau l'obligent à tourner de façon synchrone avec le manteau (Buffett, 1997) ou alors la déforme. Aussi, les modèles réalisés pour expliquer la rotation de la graine sont fortement dépendants de certains paramètres, comme la viscosité de la graine, qui sont encore très mal contraints (Buffett et Glatzmaier, 2000).

### **1.2.3 La graine**

La sismologie apporte d'importantes contraintes sur la structure de la graine et elle bénéficie des progrès observationnels, théoriques, numériques et expérimentaux de la physique des roches, de la géodynamique et du géomagnétisme. Les études sismologiques de la graine se sont focalisées sur divers aspects de sa structure superficielle et interne. Nous nous intéresserons plus particulièrement à l'anisotropie de la graine.

#### **Propriétés physiques, élastiques et plastiques du fer dans la graine**

Les propriétés sismiques de la graine sont essentiellement celles du fer. On ne sait pas encore aujourd'hui reproduire en laboratoire les conditions thermodynamiques de la graine. Cependant, l'étude des propriétés du fer a bénéficié de progrès très importants comme l'utilisation des enclumes de diamant associées à des analyses par des rayons X produits par des synchrotrons. Ces nouvelles techniques ont permis d'étudier le diagramme de phases du fer, sa structure cristalline et ses propriétés élastiques à des conditions de

pression et de température de plus en plus proches de celles du noyau interne. Dans un même temps, les calculs *ab initio* sur la structure cristalline du fer et ses propriétés élastiques ont réalisés des progrès importants.

### Conditions thermodynamiques de la graine

Les propriétés sismiques de la graine seront en grande partie fonction de la phase du fer stable dans ces conditions thermodynamiques. Quelles sont ces conditions thermodynamiques ? La pression est de 330 GPa à l'ICB et de 360 GPa au centre du noyau interne. Par contre, la température de la graine est beaucoup moins bien contrainte. En effet, on suppose que la graine est isotherme et que cette température est liée à la température de fusion de l'alliage de fer constituant le noyau terrestre. Or la température de fusion de cet alliage est très fortement dépendante de la composition en éléments légers (Poirier, 1994). En fonction du type d'expérimentation, des éléments théoriques considérés et de la façon d'extrapoler les données obtenues à basse pression, la gamme de température proposée varie entre 4000 K et 8000 K (Williams et al., 1987; Boehler, 1993; Poirier et Shankland, 1993; Saxena et al., 1994; Anderson et Duba, 1997; Ma et al., 2004).

### Diagramme Pression-Température du fer

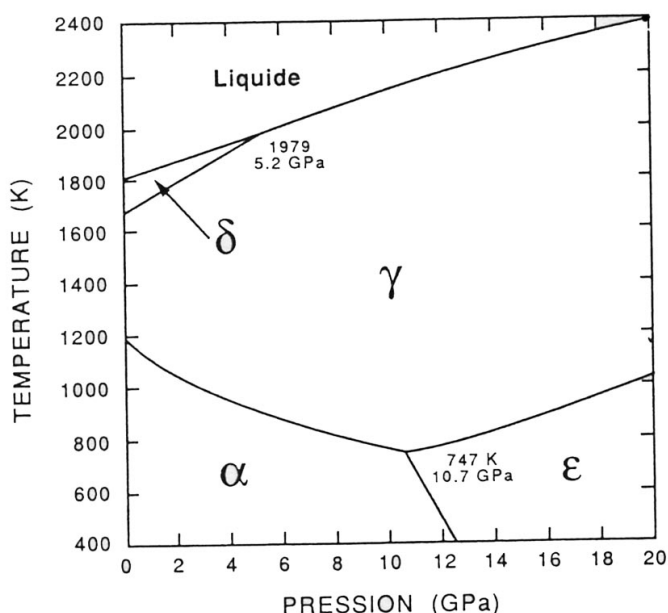


FIG. 1.17 – Diagramme P-T du fer pur à basse pression d'après Poirier (1991).

À basse température et basse pression, le diagramme P-T du fer est relativement bien connu (figure 1.17). Il existe quatres phases stables :

- à basse pression et basse température, c'est une phase cubique centrée (bcc), appelée  $\alpha$ , qui est stable
- au-delà de 800 K à 1200 K et sur une large gamme de pression, la phase cubique face centrée (fcc) nommée  $\gamma$  est stable (figure 1.18)
- près du point de fusion (1979 K) et à basse pression, il existe une autre phase cubique centrée notée  $\delta$
- à haute pression, la phase hexagonale compacte (hcp) appelée  $\epsilon$  est stable (figure 1.18)

Chacune des transitions de phase dans cette gamme de pression (0 - 20 GPa) est relativement bien contrainte.

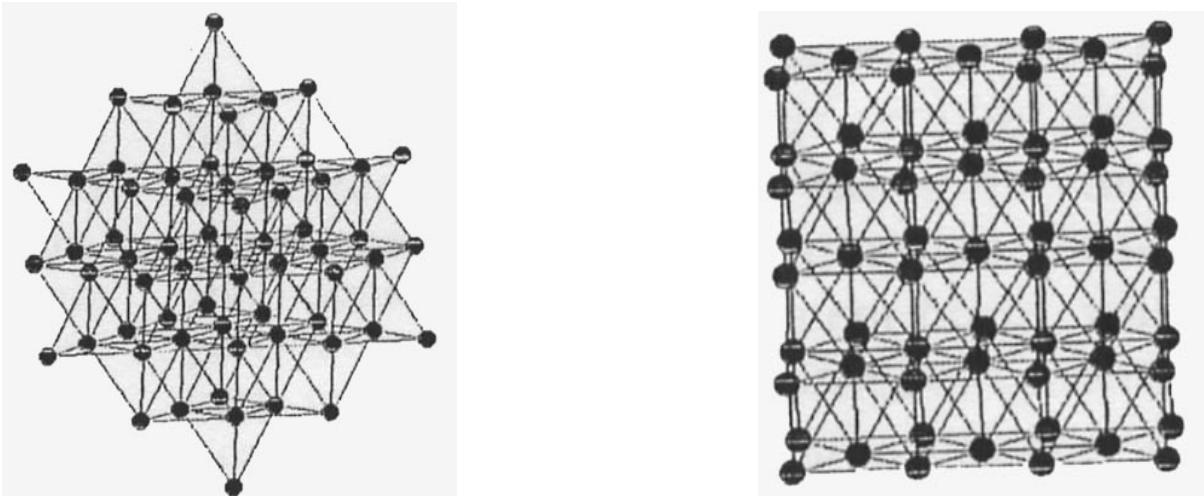


FIG. 1.18 – Structure cristalline du fer  $\gamma$  (gauche) et du fer  $\epsilon$  (droite).

On considère généralement que le fer  $\epsilon$  est la phase stable dans la graine, mais il existerait d'autres phases de haute pression et haute température. Boehler (1993) et Saxena et al. (1995) proposent l'existence d'une transition solide-solide entre la phase  $\epsilon$  et une phase  $\beta$ , dont la structure serait du type orthorhombique (Andrault et al., 2000), et qui serait stable à partir de 1400 K et au-delà de 40 GPa. Anderson et Duba (1997) supposent que cette phase reste stable au niveau de l'ICB, et peut être également dans la graine. Par ailleurs, au delà de 200 GPa, il existerait une transition solide-solide  $\beta \rightarrow \alpha'$  (figure 1.19),  $\alpha'$  étant une phase du fer à structure cubique centrée (Saxena et Dubrovinsky, 1998; Poirier et Shankland, 1993).

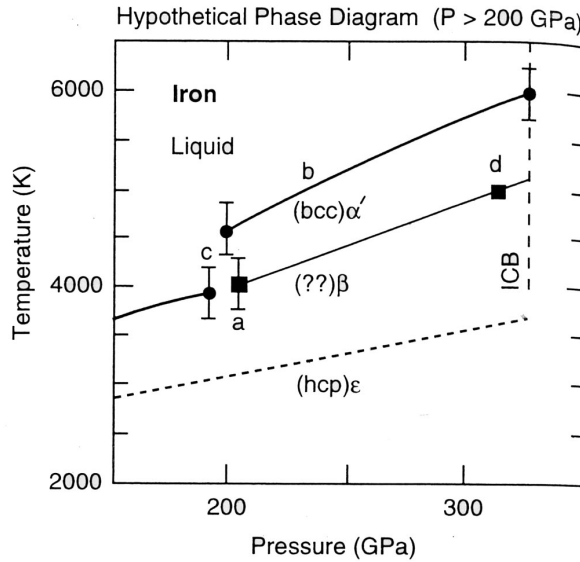


FIG. 1.19 – Diagramme P-T du fer à haute pression et haute température (Anderson et Duba, 1997).

Il y a donc plusieurs phases du fer possibles aux conditions thermodynamiques de la graine. Par ailleurs, la présence d'éléments légers peut modifier le diagramme P-T du fer et donc la détermination de la phase stable dans la graine : en présence de silice, les phases bcc et hcp peuvent être stables dans la graine et coexister (Lin et al., 2002a; Vočadlo et al., 2003).

#### Propriétés élastiques et plastiques du fer

De nombreux travaux expérimentaux et théoriques ont été menés sur le fer  $\epsilon$  montrant que le fer hcp est anisotrope. Cependant, on constate que le taux d'anisotropie et l'orientation des directions rapides peuvent être très variables (Antonangeli et al., 2004; Merkel et al., 2005). Les expériences menées sur le fer à partir de mesures de diffraction de rayons X proposent plutôt un maximum d'anisotropie à  $45^\circ$  de l'axe  $\hat{c}$  du fer  $\epsilon$  et des vitesses de propagation similaires le long de l'axe  $\hat{c}$  et  $\hat{a}$  (Mao et al., 1998). Ces résultats sont confirmés par Antonangeli et al. (2004) et Merkel et al. (2005). Cependant, les expérimentations théoriques montrent des comportements extrêmement variés (figure 1.20). Ainsi, les calculs de Stixrude et Cohen (1995), effectués à 0 K donnent un axe  $\hat{c}$  rapide et une direction lente autour de  $50^\circ$ , tandis que Söderlind et al. (1996) proposent plutôt des axes  $\hat{c}$  et  $\hat{a}$  lents et une direction légèrement plus rapide à  $45^\circ$  de l'axe  $\hat{c}$ . Par ailleurs, les calculs menés à 221 GPa et 300 K par Laio et al. (2000) conduisent à un axe  $\hat{c}$  rapide et un axe  $\hat{a}$  lent, sans directions lentes ou rapides intermédiaires. Enfin, Steinle-Neumann et al.



(2001) proposent, à 6000 K, un axe  $\hat{c}$  lent et un axe  $\hat{a}$  très rapide.

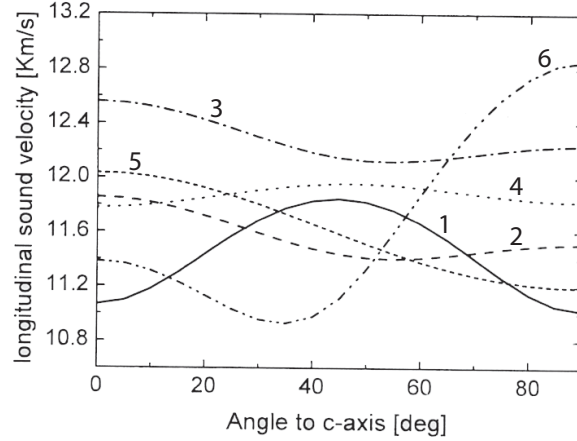


FIG. 1.20 – Variations de la vitesse des ondes P en fonction de la direction de propagation par rapport à l'axe  $\hat{c}$  du fer  $\epsilon$  à 211 GPa (d'après Antonangeli et al. (2004)). Les mesures par XRD (X-ray radial diffraction) montrent une direction rapide à 45° de l'axe de symétrie (1) et des calculs à 0 K (4) montrent la même tendance mais avec une amplitude beaucoup plus faible. À 0 K, d'autres développements théoriques peuvent conduire à un axe  $\hat{c}$  rapide (2 et 3) et une direction lente intermédiaire à 45°. Les propriétés élastiques du fer sont dépendantes des conditions thermodynamiques. Ainsi, des calculs à 300 K et 210 GPa montrent que l'axe  $\hat{c}$  est rapide et l'axe  $\hat{a}$  lent (5). Enfin, des calculs effectués pour une température de 6000 K conduisent à un axe  $\hat{a}$  rapide (6).

La disparité des résultats pourrait être due aux difficultés théoriques rencontrées pour effectuer les calculs aux conditions thermodynamiques de la graine (Gannarelli et al., 2003), à la difficulté de mener des expériences sur le fer  $\epsilon$  seul, à cause de la transition bcc-hcp autour de 13 GPa (Antonangeli et al., 2004), ou encore à cause de l'apparition d'une texture engendrée par les contraintes appliquées sur l'échantillon lors de l'expérience. Il est donc possible que la structure cristalline du fer change avec la profondeur (Vočadlo et al., 2003; Belonoshko et al., 2003) ou que le comportement élastique du fer  $\epsilon$  varie avec les conditions thermodynamiques. Steinle-Neumann et al. (2001) proposent qu'au-delà de 1500 K l'axe  $\hat{c}$  devienne lent. Cependant, Gannarelli et al. (2005) montrent que les variations du comportement élastique avec la température sont probablement beaucoup plus faibles.

L'étude théorique de Poirier et Price (1999) à partir de calcul *ab initio* montre que le principal système de glissement du fer hexagonal  $\epsilon$  est vraisemblablement basal plutôt que

prismatique. La principale incertitude pour déterminer un système de glissement provient des constantes élastiques du fer (Wenk et al., 2000a). La déformation du fer  $\epsilon$  a également été étudiée expérimentalement sous enclume de diamant (Wenk et al., 2000b), et confirme le glissement basal du fer  $\epsilon$ .

## Principales caractéristiques de la structure anisotrope de la graine

Poupinet et al. (1983) ont observé que les ondes PKP(DF) se propageant dans la direction de l’axe de rotation de la Terre sont plus rapides que les ondes se propageant parallèlement au plan de l’équateur. Cette observation est interprétée en terme d’anisotropie quelques années plus tard grâce à l’analyse des résidus des ondes de volumes (Morelli et al., 1986) et celle des modes propres de vibration (Woodhouse et al., 1986). Par la suite, cette observation est confirmée par l’étude des résidus absolus des ondes PKP(DF) (e.g., Shearer, 1994; Su et Dziewonski, 1995) et par celle des résidus différentiels BC-DF et AB-DF (e.g., Creager, 1992; Song et Helmberger, 1993; Vinnik et al., 1994; McSweeney et al., 1997; Creager, 1999; Garcia et Souriau, 2000). Le splitting des modes propres s’explique également avec une graine anisotrope (e.g., Woodhouse et al., 1986; Tromp, 1993, 1995; Romanowicz et al., 1996), même s’il semble difficile de concilier les observations des modes propres avec celles des résidus des ondes de volume (Tromp, 1995). La graine présenterait donc une anisotropie cylindrique, avec un taux d’anisotropie moyen de l’ordre de 3% et un axe de symétrie rapide parallèle à l’axe de rotation de la Terre. On attribue généralement cette anisotropie à une orientation préférentielle du fer dans la graine.

Des explications alternatives à l’anisotropie ont été proposées pour expliquer les variations des résidus différentiels des phases PKP en fonction de l’orientation du rai par rapport à l’axe de rotation de la graine. Les résidus PKP(AB)-PKP(DF) sont particulièrement sensibles aux variations de vitesse à la base du manteau. Bréger et al. (2000) ont montré qu’une grande partie du signal pouvait être attribué à la couche D”. Cependant, pour expliquer les variations des résidus PKP(BC)-PKP(DF), il est nécessaire d’introduire l’anisotropie dans la graine (Tkalčić et al., 2002). D’autre part, Romanowicz et Bréger (2000) ont montré que les anomalies observées sur certains modes (attribuées à une graine anisotrope) pourraient également s’expliquer par des hétérogénéités dans le noyau liquide au niveau du cylindre tangent, ou avec une accumulation de matériel léger aux pôles sous la CMB. Cependant, l’analyse des ondes PKP(BC) et des temps différentiels S3KS-SKKS par Souriau et al. (2003b) n’a pas révélé d’hétérogénéités ou d’anisotropie dans le cylindre tangent, ni d’accumulation aux pôles. Par ailleurs, les anomalies de temps de propagation

sont bien expliquées par l'anisotropie et le niveau d'hétérogénéité de vitesse dans la graine n'est pas suffisante pour expliquer les résidus (Creager, 1999; Garcia et Souriau, 2000).

Si l'existence d'une graine anisotrope semble relativement bien établie, la structure fine de l'anisotropie s'avère plus complexe. Les principales interrogations portent sur l'amplitude de l'anisotropie au sommet de la graine, sur d'éventuelles variations longitudinales et en profondeur, ainsi que sur l'inclinaison de l'axe de symétrie. La géométrie exacte de cette anisotropie contient des informations importantes sur la dynamique de la graine.

En ce qui concerne l'axe de symétrie, il pourrait être légèrement incliné (de l'ordre de  $10^\circ$  par rapport à l'axe de rotation de la Terre) (Su et Dziewonski, 1995; Ishii et Dziewonski, 2003), mais les données ne permettent pas de confirmer cette inclinaison. En effet, la distribution spatiale inhomogène des données pourrait engendrer artificiellement cette inclinaison de l'axe de symétrie (Souriau et al., 1997).

Les 100 premiers kilomètres de la graine semblent isotropes (Shearer, 1994; Song et Helmberger, 1995; Niu et Wen, 2001). Cependant, des études de modes propres (Tromp, 1993) et de temps de propagation (Su et Dziewonski, 1995) montrent plutôt une augmentation de l'anisotropie au voisinage de l'ICB. Par ailleurs, Durek et Romanowicz (1999) montrent que l'épaisseur de cette couche isotrope, si elle existe, ne doit pas être supérieure à 100-200 km. L'observation d'une variation hémisphérique des résidus PKP(BC)-PKP(DF) (Tanaka et Hamaguchi, 1997; Creager, 1999; Garcia et Souriau, 2000) suggère une variation longitudinale de l'épaisseur de cette couche. Les ondes qui se propagent selon l'axe de rotation de la Terre sont plus lentes dans l'hémisphère Est (pour des longitudes comprises entre  $40^\circ\text{E}$  et  $180^\circ\text{E}$ ) que dans l'hémisphère Ouest (pour des longitudes comprises entre  $180^\circ\text{W}$  et  $40^\circ\text{E}$ ) (voir figure 1.21). A priori, ces résidus ne sont pas affectés par une éventuelle inclinaison de l'axe de symétrie (Tanaka et Hamaguchi, 1997), ni par des structures près de la CMB puisque les résidus des PKP(BC) dans la même gamme de distances épacentrales ne présentent pas de variations hémisphériques (Souriau et al., 2003a). Garcia et Souriau (2000) ont analysé les variations latérales de l'anisotropie dans trois gammes de profondeurs. Les 100 premiers kilomètres de la graine montrent un faible niveau d'anisotropie à toutes les longitudes (figure 1.22). Par contre, entre 100 km et 400 km de profondeur, on observe de fortes variations latérales avec un taux d'anisotropie inférieur à 0.5% entre  $60^\circ\text{E}$  et  $140^\circ\text{E}$  de longitude et un taux d'anisotropie de près de 3% entre  $230^\circ\text{E}$  et  $300^\circ\text{E}$  de longitude. À plus grande profondeur, l'anisotropie ne présente pas de variations latérales significatives. Garcia et Souriau (2000) proposent ainsi un modèle de graine avec une anisotropie uniforme de l'ordre de 3% (avec un axe de symétrie parallèle à l'axe de rotation de la Terre) et une couche isotrope de 100 km d'épaisseur

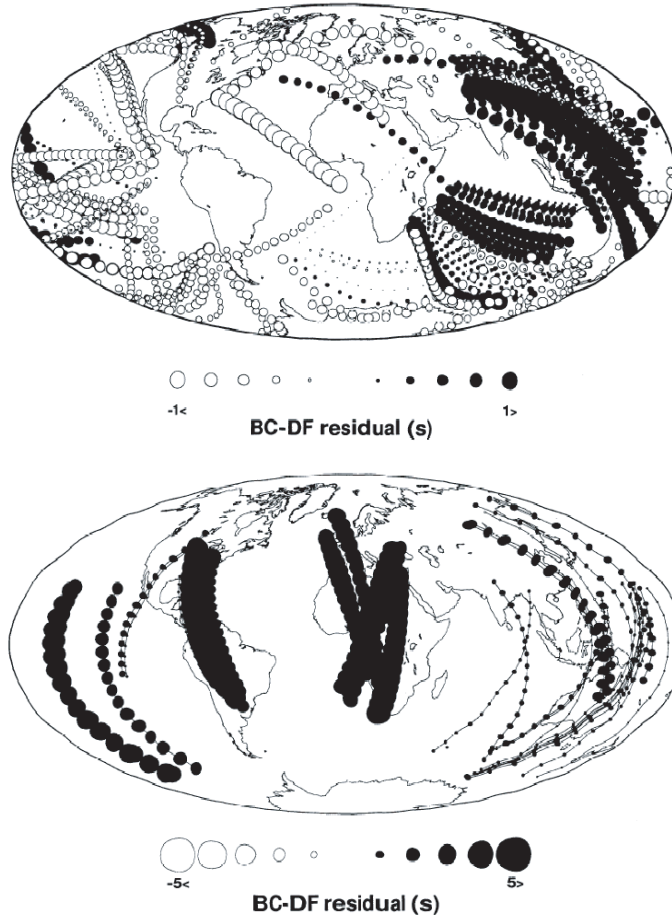


FIG. 1.21 – Distribution géographique des résidus BC-DF : (haut) pour des rais équatoriaux (inclinaison par rapport à l'axe de rotation  $> 45^\circ$ ), (bas) pour des rais polaires (inclinaison par rapport à l'axe de rotation  $< 30^\circ$ ). Les résidus sont représentés par des cercles le long de la trajectoire de la phase PKP(DF) dans la graine. Attention au changement d'échelle entre les deux figures. Les résidus polaires sont plus lents dans l'hémisphère Est que dans l'hémisphère Ouest. D'après Tanaka et Hamaguchi (1997).

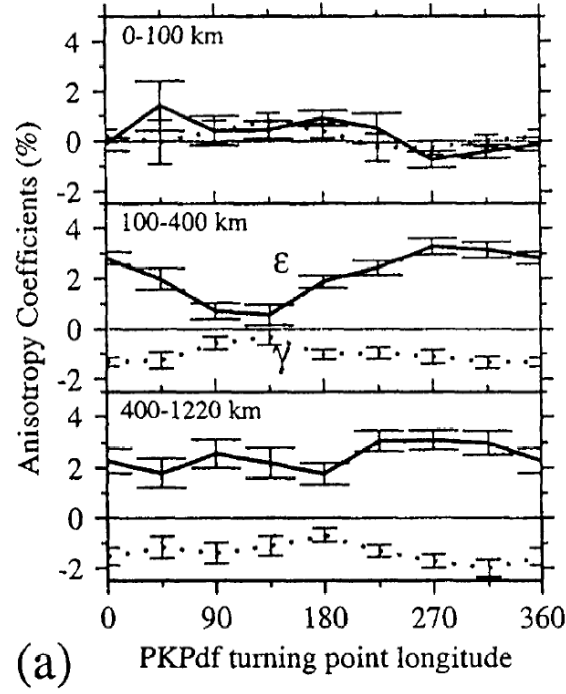


FIG. 1.22 – D’après Garcia et Souriau (2000) : Modèle de graine anisotrope. Variations des paramètres anisotropes en fonction de la longitude et de la profondeur :  $\epsilon$  (ligne) décrit le taux d’anisotropie en vitesse d’onde P et  $\gamma$  (pointillés) permet de décrire la vitesse des ondes P pour des inclinaisons intermédiaires du rai par rapport à l’axe de rotation de la Terre.

dans l'hémisphère Ouest et de 400 km d'épaisseur dans l'hémisphère Est (figure 1.23).

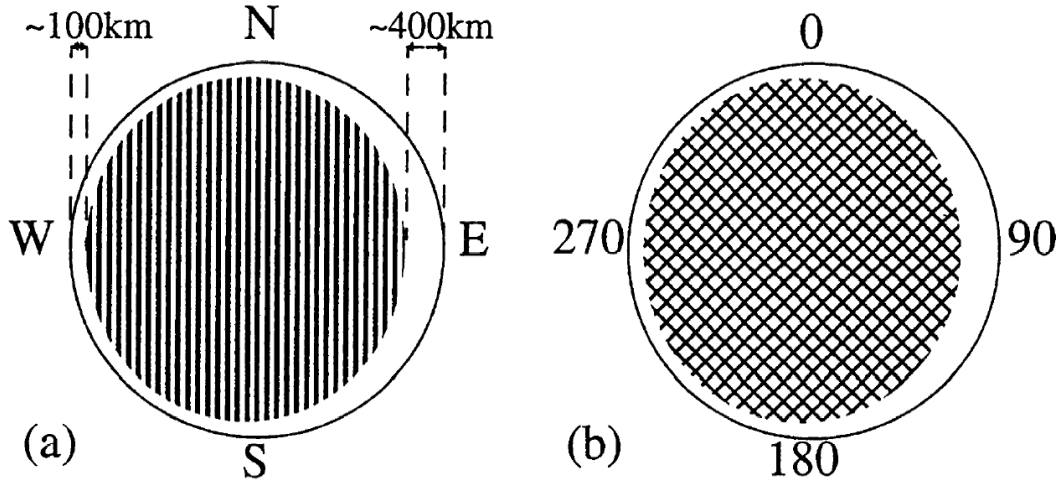


FIG. 1.23 – Représentation de la structure de la graine : coupe dans un plan méridien (a) et coupe dans le plan de l'équateur (b). La partie superficielle de la graine est constituée d'une couche homogène isotrope plus épaisse dans l'hémisphère Est que dans l'hémisphère Ouest à l'origine des variations hémisphériques des résidus des ondes de volume. La partie interne est homogène avec un taux d'anisotropie de 3% et un axe de symétrie parallèle à l'axe de rotation de la Terre. D'après Garcia et Souriau (2000)

La transition entre la couche isotrope et la structure anisotrope interne semble continue suggérant une désorientation progressive des cristaux de fer au voisinage de la surface (Ouzounis et Creager, 2001). Au contraire, la présence d'une discontinuité révélerait plutôt une transition chimique ou minéralogique. Ainsi, Song et Xu (2002) ont observé une triplification des ondes PKP(DF) pour les trajets polaires suggérant l'existence, localement, d'une couche isotrope d'environ 250 km avec un taux d'anisotropie de près de 8% juste au-dessous.

Il n'existe pas de réel consensus sur les variations en profondeur de l'anisotropie. L'inversion des modes propres de vibration par Tromp (1993) a donné un modèle de graine présentant une diminution du taux d'anisotropie avec la profondeur (effectivement, les modes propres de vibration n'ont pas de résolution au centre de la Terre). Puis, à partir de l'analyse conjointe des modes propres et des résidus des ondes de volume, Tromp (1995) propose une augmentation de l'anisotropie au voisinage du centre. De la même façon, Su et Dziewonski (1995) cherchent les variations en profondeur de l'anisotropie de la graine

avec un modèle en 4 couches : l'anisotropie est pratiquement constante pour un rayon  $r > 300$  km avec un taux de  $\sim 1.6\%$  puis augmente à plus de  $3\%$  au centre. Au contraire, McSweeney et al. (1997) ont détecté une augmentation du niveau d'anisotropie entre 200 et 500 km de profondeur sous l'ICB, avec un taux d'anisotropie de  $4\%$ , et une décroissance en dessous. Ishii et al. (2002b) obtiennent également une diminution de l'anisotropie avec la profondeur à partir de l'inversion conjointe des résidus des PKP(DF), des résidus différentiels et des modes propres de vibration. Récemment, Ishii et Dziewonski (2002) ont proposé l'existence d'une **sous-graine** en observant un changement du comportement anisotrope au centre de la graine. Ils ont observé une direction de propagation lente à environ  $50^\circ$  de l'axe de rotation pour les ondes PKP(DF) correspondant à une distance épacentrale supérieure à  $173^\circ$ . Ces mêmes données seront ensuite interprétées par Ishii et Dziewonski (2003) par un modèle de graine anisotrope à deux couches avec une très forte augmentation de l'anisotropie au centre (figure 1.24).

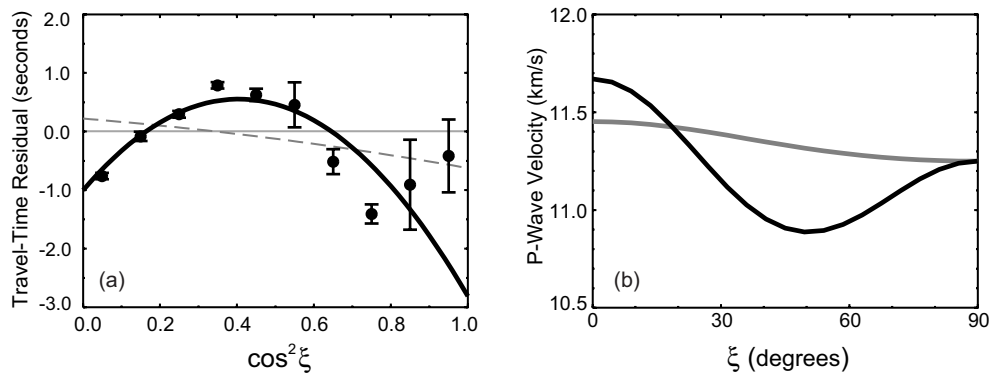


FIG. 1.24 – D'après Ishii et Dziewonski (2003) : (a) Résidus des ondes PKP(DF) dans la gamme de distances épacentrales  $173^\circ - 180^\circ$  corrigés de l'anisotropie de la partie superficielle ( $r > 300$  km) de la graine en fonction de l'inclinaison du rai  $\xi$  dans la graine par rapport à l'axe de rotation de la Terre (cercles). On observe une direction de propagation lente pour  $\xi \sim 50^\circ$ . La prédiction du modèle de Ishii et Dziewonski (2003) (avec une sous-graine) est donnée par la ligne noire et celle du modèle de Ishii et al. (2002b) (sans sous-graine) par la ligne en tirets gris. (b) Variations de la vitesse de propagation des ondes P en fonction de l'angle  $\xi$  pour le modèle de Ishii et Dziewonski (2003) dans la partie superficielle de la graine en gris et dans la sous-graine ( $r < 300$  km) en noir. Il apparaît une direction de propagation lente dans la sous graine à environ  $50^\circ$  de l'axe de rotation de la Terre.

L'existence d'une sous-graine soulève des questions sur le processus de formation de

la graine ou sur l'histoire thermique du noyau terrestre. Par ailleurs, un changement du comportement anisotrope peut indiquer des variations chimiques ou minéralogiques. Ainsi, à partir des mesures d'anomalies de splitting des modes propres, Beghein et Trampert (2003) ont obtenu un modèle de graine où le paramètre décrivant l'anisotropie des ondes P change de signe pour un rayon d'environ 400 km (figure 1.25) : l'axe de symétrie parallèle à l'axe de rotation de la Terre est rapide dans la partie superficielle de la graine et devient lent au centre. Les prédictions de ce modèle sont compatibles avec les résidus des ondes de volume dans la gamme de distances  $150^\circ - 180^\circ$ . Ce modèle suggère une inclinaison progressive des cristaux de fer ou un changement de phase.

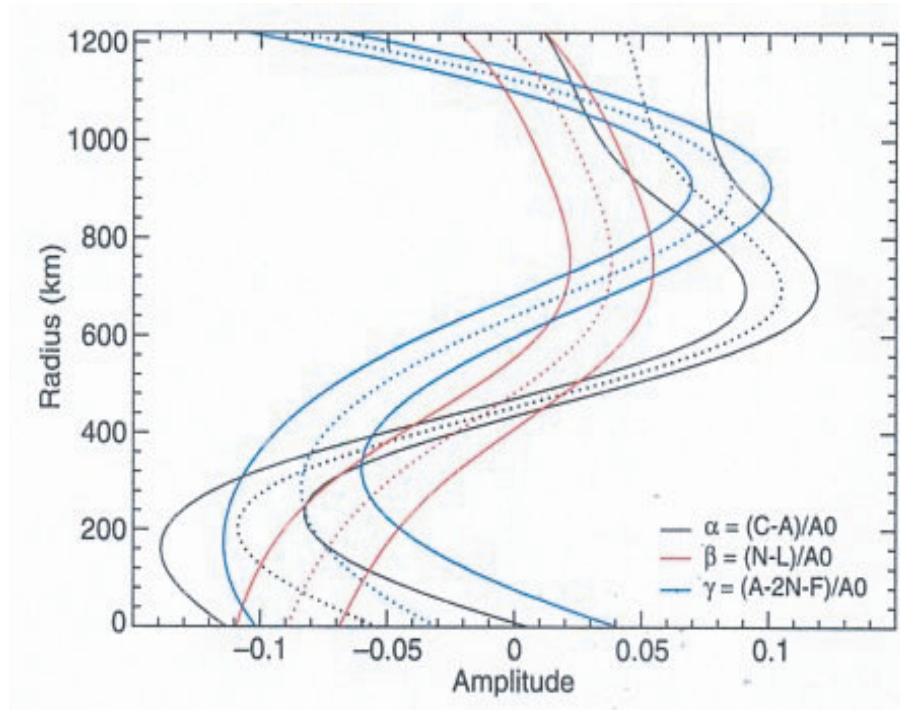


FIG. 1.25 – Modèle de Beghein et Trampert (2003) : Variations des paramètres anisotropes en fonction de la profondeur. Le paramètre  $\alpha$  correspond au taux d'anisotropie en vitesse d'onde P. Le paramètre  $\beta$  correspond au taux d'anisotropie en vitesse d'onde S. Le paramètre  $\gamma$  décrit la propagation des ondes pour des orientations intermédiaires par rapport à l'axe de symétrie. Le changement de signe de  $\alpha$  et  $\beta$  indique soit une inclinaison progressive des cristaux de fer, soit une transition de phase.

D'autres types de données telles que les variations radiales de l'atténuation peuvent apporter des contraintes supplémentaires sur la structure interne de la graine (Cormier et Li, 2002; Cormier et Stroujkova, 2005) en suggérant une transition pour un rayon autour



de 550 km. Dans cette thèse, nous allons nous intéresser à la structure profonde de la graine et au changement éventuel du comportement anisotrope en profondeur.

## Origine de l'anisotropie

L'anisotropie peut être une signature de la dynamique de la graine ou de son processus de cristallisation. On l'attribue généralement à une orientation des cristaux de fer. On distingue différents mécanismes pour engendrer une orientation préférentielle dans la graine.

En premier lieu, les mouvements de convection dans la graine sont susceptibles d'orienter les cristaux (Jeanloz et Wenk, 1988; Weber et Machetel, 1992; Romanowicz et al., 1996; Wenk et al., 2000a). Cependant, l'existence même de la convection dans la graine a été remise en cause par Yukutake (1998). Pour obtenir une orientation préférentielle à grande longueur d'onde dans la graine, il faut considérer des régimes de convection d'ordre 1 ou 2. On admet généralement que l'axe rapide des cristaux de fer s'aligne suivant les lignes de courant (Romanowicz et al., 1996). Pourtant, il semblerait que l'axe  $\hat{c}$  du fer s'oriente plutôt perpendiculairement aux lignes de courant (figure 1.26) et conduirait donc à une texture présentant plutôt une direction de propagation lente (si l'axe  $\hat{c}$  est rapide) selon l'axe de rotation de la Terre (Poirier et Price, 1999). Cependant, Garcia (2002) a montré que compte tenu des barres d'erreur sur l'estimation des paramètres sismiques de la graine, une fabrique du fer hcp présentant un axe  $\hat{c}$  lent ou rapide, en jouant sur le degré d'alignement des cristaux, pouvait expliquer les données.

Le champ magnétique pourrait également orienter les cristaux de fer. Lors de la cristallisation de la graine, les cristaux de fer, s'ils présentent une susceptibilité magnétique anisotrope, s'orientent dans le champ magnétique (Karato, 1993) (figure 1.27, modèle 1). Le fer  $\epsilon$  doit alors présenter un certain degré de susceptibilité magnétique mais ses propriétés magnétiques, à hautes pression et température, sont encore mal contraintes. Un autre mécanisme propose que le flux induit par les contraintes de Maxwell, produites par le champ magnétique, engendre une fabrique axisymétrique (Karato, 1999; Buffett et Wenk, 2001).

Bergman (1997) propose un troisième mécanisme par cristallisation de la graine sous forme de dendrites (figure 1.27, modèle 2). Lors de la cristallisation, les dendrites croissent selon un axe cristallographique du fer et s'alignent dans la direction du flux de chaleur. C'est un mécanisme intéressant qui permet à la fois d'expliquer l'anisotropie de vitesse et celle d'atténuation (Souriau et Romanowicz, 1996, 1997; Oreshin et Vinnik, 2004).

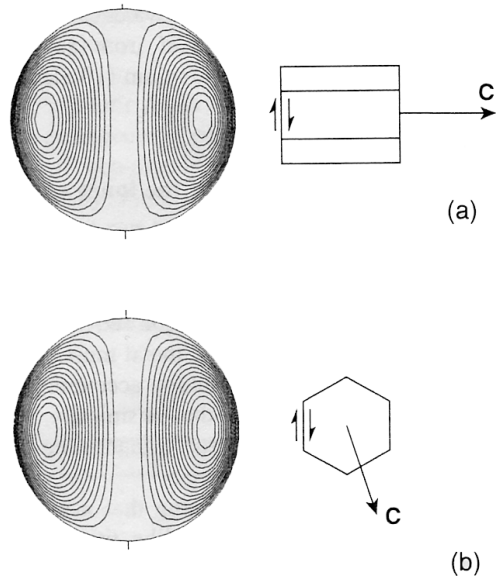


FIG. 1.26 – Orientation de l'axe  $\hat{c}$  du fer dans le cas d'un système de convection d'ordre 1 dans la graine (Poirier et Price, 1999). (a) Si le système de glissement principal est basal, alors l'axe  $\hat{c}$  s'oriente dans le plan de l'équateur. (b) Si le système de glissement principal est prismatique, alors l'axe de symétrie s'oriente également dans le plan de l'équateur

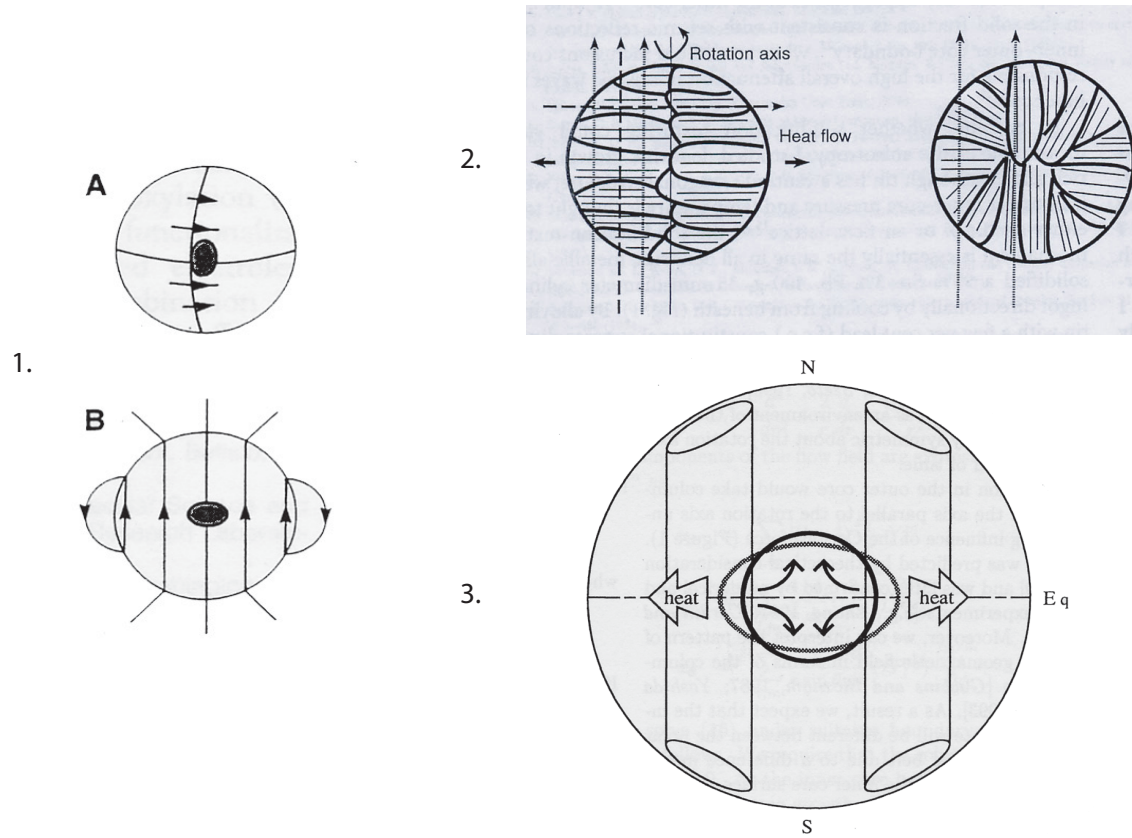


FIG. 1.27 – Modèle de formation de l'anisotropie de la graine. (1) Modèle de Karato (1993) : orientation des cristaux de fer dans le champ magnétique, dans le cas d'un champ toroïdal (A) et d'un champ poloïdal (B). Les observations sismiques sont plutôt compatibles avec un champ toroïdal dominant dans le noyau. (2) Modèle de Bergman (1997) coupe méridionale à gauche et coupe équatoriale à droite : croissance de dendrites dans la direction du flux de chaleur. (3) Modèle de Yoshida et al. (1996) : la chaleur étant mieux évacuée par la convection à l'extérieur du cylindre tangent, le flux de chaleur est plus important à l'équateur. La croissance anisotrope de la graine entraîne un réajustement hydrostatique par circulation dans la graine.

Enfin, d'après Yoshida et al. (1996), le flux de chaleur à la surface de la graine serait plus important à l'équateur qu'aux pôles à cause du régime de convection dans le noyau liquide (figure 1.27, modèle 3). La graine aurait alors une croissance anisotrope et les réajustements hydrostatiques consécutifs engendreraient un champ de contrainte dans la graine. L'anisotropie de la graine serait liée à un alignement des cristaux de fer dans ce champ de contrainte.

Enfin, Singh et al. (2000) proposent l'existence d'inclusions de fluide (3 à 10% du volume de la graine) ellipsoïdales et alignées dans le plan de l'équateur pour expliquer l'anisotropie de la graine. C'est un modèle qui permet également d'expliquer l'anisotropie d'atténuation.

### 1.2.4 L'utilisation des noyaux de sensibilité

Un grand nombre d'études sur la structure sismique de la graine ont été jusqu'à présent menées dans le cadre de la théorie des rais à l'aide des résidus de temps de propagation des ondes PKP(DF). Pourtant, compte tenu de la longue trajectoire de ces ondes, la taille de la zone de Fresnel est importante dans la graine, environ 500 km pour une période dominante de 2 s, soit pratiquement le diamètre de la supposée sous-graine proposée par Ishii et Dziewonski (2002). Les noyaux de sensibilité, décrivant comment l'onde échantillonne le milieu au sein de la zone de Fresnel, n'ont été utilisés jusqu'à présent que pour des études tomographiques du manteau. Nous nous sommes donc interrogés sur l'apport des noyaux de sensibilité à l'étude de la structure radiale de la graine (inversion 1D). Cependant, la graine est un milieu anisotrope présentant une structure axisymétrique. Il faut donc développer l'expression des noyaux décrivant la sensibilité du temps de propagation des ondes aux perturbations élastiques transverses isotropes. Ensuite, compte tenu des données disponibles (le fichier EHB), nous avons comparé les résultats de l'inversion de la structure anisotrope de la graine dans le cadre des deux théories (géométrique et à fréquence finie) et testé l'existence d'une sous-graine.



# Chapitre 2

## Diffusion par une perturbation élastique

Il existe des modèles de référence radialement stratifiés (Dziewonski et Anderson, 1981; Kennett et Engdahl, 1991; Kennett et al., 1995) donnant les principaux paramètres sismiques nécessaires pour décrire la propagation des ondes dans la Terre. La distribution des paramètres sismiques est ensuite décrite en terme de variations par rapport à ce modèle de référence. Il faut ensuite relier les propriétés de la propagation des ondes dans le milieu réel à celles de la propagation dans le milieu de référence. Lorsque les variations sont faibles, on peut utiliser une théorie de perturbation au premier ordre. Ainsi, dans l'**approximation de Born**, l'onde incidente interagit une seule fois avec les hétérogénéités du milieu et on néglige les interactions multiples. Dans ce chapitre, nous utiliserons l'approximation de Born pour décrire la perturbation du champ de déplacement par une perturbation élastique isotrope et transverse isotrope (ou hexagonale). Nous donnerons les expressions des matrices de scattering décrivant la diffusion des ondes de volume par des perturbations élastiques. Certains résultats développés dans ce chapitre ont fait l'objet d'une publication (Calvet et al., 2006a).

### 2.1 Champ diffusé par une perturbation élastique

#### 2.1.1 Approximation de Born

Soit une perturbation élastique  $\delta \mathbf{c}$  du milieu de référence isotrope  $\mathbf{c}^0$  :

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}^0 + \delta \mathbf{c} \tag{2.1}$$

On considère que cette perturbation est petite et vérifie  $|\delta \mathbf{c}| \ll |\mathbf{c}|$ . En utilisant l'approximation de Born, on peut écrire le champ de déplacement total  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  au point  $\mathbf{r}$  comme la somme du déplacement dans le milieu de référence  $\mathbf{u}^0(\mathbf{r})$  et de la perturbation  $\delta \mathbf{u}(\mathbf{r})$  résultant de la perturbation  $\delta \mathbf{c}$  du milieu de référence :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^0 + \delta \mathbf{u} \quad (2.2)$$

Les milieux de référence sont souvent des milieux homogènes ou à symétrie sphérique. Comme les perturbations sont définies comme la différence entre le milieu réel et le milieu de référence, ce dernier doit être choisi de façon à ce que les perturbations soient faibles dans tout le milieu.

### 2.1.2 Equation d'onde

En utilisant la convention de sommation d'Einstein sur les indices répétés, on peut écrire l'équation d'onde sous la forme :

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} - \nabla \cdot \mathbf{T} = \mathbf{f} \quad (2.3)$$

avec  $\rho$  la densité,  $\mathbf{f}$  une force volumique représentant la source et  $\mathbf{T}$  le tenseur des contraintes. Pour de petits déplacements, la loi de Hooke permet de relier le tenseur des contraintes  $\mathbf{T}$  au tenseur des déformations  $\mathbf{E}$  via le tenseur élastique  $\mathbf{c}$  :

$$\mathbf{T} = \mathbf{c} : \mathbf{E} \quad (2.4)$$

Les composantes de  $\mathbf{E}$  s'écrivent  $E_{ij} = (\partial_i u_j + \partial_j u_i)/2$ . Dans le domaine fréquentiel, l'équation d'onde devient :

$$\rho \omega^2 \mathbf{u} + \nabla \cdot (\mathbf{c} : \mathbf{E}) = -\mathbf{f} \quad (2.5)$$

---

#### Notation

Nous adopterons la convention de signe suivante pour la transformée de Fourier :

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \int_0^{+\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt \\ f(t) &= \frac{1}{\pi} \mathcal{R}e \int_0^{+\infty} f(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \end{aligned} \quad (2.6)$$

pour les fonctions qui sont nulles quand  $t < 0$ . En utilisant la relation de symétrie  $f(-\omega) = f^*(\omega)$  (avec  $*$  pour le complexe conjugué), on peut réduire l'intégration sur les fréquences à  $0 < \omega < +\infty$ .

On introduit alors la perturbation du déplacement et du tenseur élastique dans (2.5), et en ne gardant que les termes d'ordre 1, on obtient l'équation d'onde pour le champ perturbé

$$\rho \omega^2 \delta \mathbf{u} + \nabla \cdot (\mathbf{c}^0 : \delta \mathbf{E}) = -\delta \mathbf{f} \quad (2.7)$$

avec

$$\delta \mathbf{f} = \nabla \cdot (\delta \mathbf{c} : \mathbf{E}^0) \quad (2.8)$$

Le terme de droite est assimilable à une source secondaire.

On peut introduire ici un tenseur de moment à la source

$$\mathbf{M} = \delta \mathbf{c} : \mathbf{E}^0 \quad (2.9)$$

$\mathbf{M}$  décrit la diffusion de l'onde de référence en un point donné du milieu par la perturbation du tenseur élastique.

Pour résoudre l'équation (2.7), on introduit le tenseur de Green  $\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{x}')$  qui est solution de l'équation

$$\rho \omega^2 \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{x}') + \nabla \cdot (\mathbf{c} : \nabla \mathbf{G}) = -\mathbf{I} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{x}') \quad (2.10)$$

avec  $G_{in}$  le déplacement dans la direction  $\hat{\mathbf{x}}_i$  au point  $\mathbf{r}$  produit par une impulsion unitaire au point  $\mathbf{x}'$  dans la direction  $\hat{\mathbf{x}}_n$ . Zhao et Dahlen (1996) ont montré que l'expression en champ lointain (far field) du tenseur de Green dans une Terre latéralement hétérogène s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{x}') = \hat{\mathbf{p}}''(\mathbf{r}) g(\mathbf{r}, \mathbf{x}') \hat{\mathbf{p}}(\mathbf{x}') \quad (2.11)$$

avec  $\hat{\mathbf{p}}''$  la polarisation de l'onde diffusée et  $g(r, x')$  une fonction de propagation. Dans un milieu isotrope, le tenseur de Green est donné par (Zhao et Dahlen, 1996) :

$$\mathbf{G}_{Ray}(\mathbf{r}, \mathbf{x}') = \frac{\hat{\mathbf{p}}''(\mathbf{r})}{\sqrt{4\pi\rho_R c_R}} \Pi_{RX} \frac{e^{-i(\omega T'' - M''\pi/2)}}{\mathcal{R}_{RX}} \frac{\hat{\mathbf{p}}''(\mathbf{x}')}{\sqrt{4\pi\rho_X c_X^3}} \quad (2.12)$$

avec  $c_R$  et  $c_X''$  la vitesse de l'onde diffusée au récepteur et au point diffractant, respectivement,  $\rho_R$  la densité au récepteur et  $\rho_X$  au point diffractant.  $\mathcal{R}_{RX}$  est l'expansion géométrique de  $\mathbf{x}'$  vers  $\mathbf{r}$  et  $\Pi$  le produit des coefficients de réflexion/transmission le long du rai.  $T''$  est le temps de propagation entre le point diffractant et le récepteur.  $M''$  est le coefficient de Maslov du rai diffusé. Le coefficient de Maslov est un entier qui traduit le nombre de passage de l'onde à travers une caustique (Dahlen et Tromp, 1998).



### 2.1.3 Perturbation du champ de déplacement

En utilisant le théorème de représentation et les conditions de surface libre appliquées au tenseur de Green (Annexe A), on obtient la perturbation du champ de déplacement

$$\delta \mathbf{u}(\mathbf{r}) = - \int_{V'} \mathbf{M}(\mathbf{x}') : \nabla \mathbf{G}^t(\mathbf{r}, \mathbf{x}') dV' \quad (2.13)$$

Afin de décrire les effets de diffusion au point  $\mathbf{x}'$ , on définit une matrice de scattering  $\mathbf{S}$  telle que

$$\delta \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \int_{V'} \mathbf{G}_{Ray}^t(\mathbf{r}, \mathbf{x}') . \mathbf{S}(\mathbf{x}') . \mathbf{u}^0(\mathbf{x}') dV' \quad (2.14)$$

Dans l'approximation des rais, on considère que, dans l'expression (2.12), le gradient s'applique essentiellement sur le terme  $\exp(-i\omega T'')$  qui oscille rapidement. Ainsi, en substituant le gradient du tenseur de Green et celui du déplacement en  $\mathbf{x}'$  dans (2.13), on obtient que la matrice de scattering s'écrit

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}') = - \frac{\omega^2}{c_X' c_X''} \left( \hat{\mathbf{k}}'' . \delta \mathbf{c}(\mathbf{x}') . \hat{\mathbf{k}}' \right) \quad (2.15)$$

avec  $\hat{\mathbf{k}}'$  et  $\hat{\mathbf{k}}''$  les vecteurs d'onde unitaires de l'onde incidente et de l'onde diffusée au point  $\mathbf{x}'$ ,  $c_X'$  la vitesse de l'onde incidente au point  $\mathbf{x}'$ , et  $\omega$  la fréquence angulaire.  $\mathbf{S}$  est un tenseur d'ordre 2 qui décrit la diffusion d'une onde incidente par une perturbation élastique au point  $\mathbf{x}'$  (Zhao et Dahlen, 1996). Cette expression est valide pour n'importe quel type d'interaction (P-P, P-SV, SV-SV,...), mais également pour n'importe quel type de perturbation (isotrope, anisotrope).

Nous cherchons maintenant à développer l'expression au récepteur du champ diffusé par une hétérogénéité au point  $\mathbf{x}'$ . Pour cela, on modélise la source par un moment scalaire  $M_0$ , un mécanisme au foyer  $\hat{\mathbf{M}}_0$  et une fonction source  $\dot{s}(t)$  :

$$\dot{\mathbf{M}}(t) = \sqrt{2} M_0 \hat{\mathbf{M}}_0 \dot{s}(t) \quad (2.16)$$

On peut montrer que l'amplitude de l'onde incidente au point diffractant  $\mathbf{x}'$  dans le domaine fréquentiel s'écrit (Dahlen et al., 2000) :

$$\mathbf{u}^0(\omega) = \frac{\mathbf{p}'(\mathbf{x}')}{4\pi} \Lambda' \frac{\Pi_{XS}}{\mathcal{R}_{XS}} \dot{s}(\omega) e^{(-i\omega T' + M' \pi/2)} \quad (2.17)$$

$\Lambda'$  est un terme de source :

$$\Lambda' = \sqrt{2} M_0 (\rho_S c_S^5)^{-1/2} \hat{\mathbf{M}}_0 : \frac{1}{2} (\mathbf{k}_S' \mathbf{p}_S' + \mathbf{p}_S' \mathbf{k}_S') \quad (2.18)$$

$\rho_S$  est la densité à la source,  $c_S$  est la vitesse de l'onde incidente à la source,  $\mathbf{k}'_S$  et  $\mathbf{p}'_S$  les vecteurs d'onde et de polarisation de l'onde à la source.

La figure (2.1) décrit la géométrie du problème de diffusion.

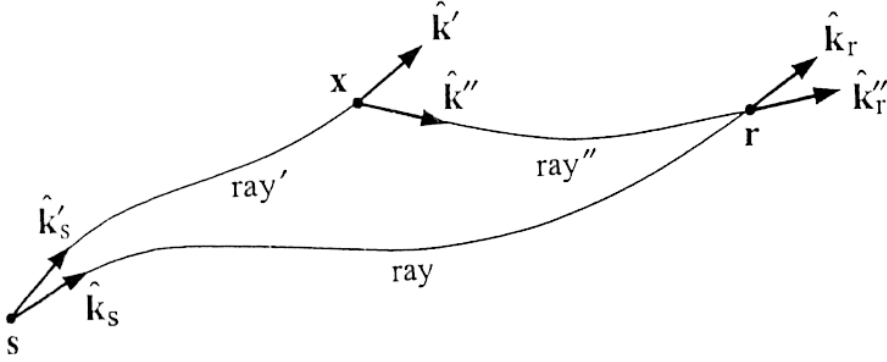


FIG. 2.1 – Géométrie du problème de diffusion par une hétérogénéité au point  $\mathbf{x}'$  (Dahlen et al., 2000).  $\hat{\mathbf{k}}_S$  est le vecteur d'onde à la source pour le rai de référence tandis que  $\hat{\mathbf{k}}'_S$  correspond au vecteur d'onde à la source pour le rai incident. Côté récepteur,  $\hat{\mathbf{k}}_R$  est le vecteur d'onde pour le rai de référence et  $\hat{\mathbf{k}}''_R$  le vecteur d'onde pour le rai diffusé. Au point diffractant,  $\hat{\mathbf{k}}'$  est le vecteur d'onde du rai incident et  $\hat{\mathbf{k}}''$  le vecteur d'onde du rai diffusé.

---

### Notations

Afin d'homogénéiser les notations, nous noterons désormais par un prime toutes les grandeurs associées à l'onde incidente, avec un double prime toutes les grandeurs associées à l'onde diffusée et sans apostrophe les grandeurs associées à l'onde de référence :

$$T = T_{RS}, \quad T' = T_{XS}, \quad T'' = T_{XR} \quad (2.19)$$

$$M = M_{RS}, \quad M' = M_{XS}, \quad M'' = M_{XR} \quad (2.20)$$

$$\Pi = \pi_{RS}, \quad \Pi' = \pi_{XS}, \quad \Pi'' = \pi_{XR} \quad (2.21)$$

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_{RS}, \quad \mathcal{R}' = \mathcal{R}_{XS}, \quad \mathcal{R}'' = \mathcal{R}_{XR} \quad (2.22)$$

On notera les relations de symétrie :

$$T_{XR} = T_{RX}, \quad M_{XR} = M_{RX} \quad (2.23)$$

$$\Pi_{XR} = \Pi_{RX}, \quad \mathcal{R}_{XR} c_R = \mathcal{R}_{RX} c'' \quad (2.24)$$


---

Si on introduit (2.17) et (2.12) dans (2.14), on obtient que la composante  $i$  du champ perturbé au récepteur s'écrit (dans le domaine fréquentiel) :

$$\delta u_i(\omega) = \frac{1}{(4\pi)^2} \int_V \Lambda' Y'' \frac{\Pi' \Pi''}{(\mathcal{R}' \mathcal{R}'')} \times \left[ \rho^{-1} \hat{\mathbf{p}}''(\mathbf{x}') \cdot \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{p}}'(\mathbf{x}') \right] \dot{s}(\omega) e^{[-i\omega(T'+T'')+(M'+M'')\pi/2]} dV \quad (2.25)$$

avec  $\rho$  la densité au point diffractant et  $Y''$  le terme de projection au récepteur

$$Y'' = (\rho_R c_R)^{-1} (\hat{n}_i \cdot \hat{\mathbf{p}}'_R) \quad (2.26)$$

où  $\hat{\mathbf{p}}'_R$  est le vecteur de polarisation de l'onde diffusée au récepteur. Le terme sans dimension  $[\rho^{-1} \hat{\mathbf{p}}''(\mathbf{x}') \cdot \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{p}}'(\mathbf{x}')] \dot{s}(\omega)$  caractérise la diffusion en fonction du type d'onde incidente et diffusée et de la perturbation considérée.

Nous développerons dans les sections suivantes le cas des perturbations isotropes et transverses isotropes afin de trouver les tenseurs de scattering associés.

## 2.2 Cas d'une perturbation isotrope

Dans un premier temps, nous examinerons la diffusion par une perturbation isotrope.

### 2.2.1 Perturbation du tenseur élastique

Un milieu isotrope ne présente pas de direction privilégiée, et le tenseur élastique correspondant n'est fonction que du tenseur identité. Il est pratique d'introduire la notation de Voigt qui transforme le tenseur élastique d'ordre 4 en une matrice d'ordre 2 noté  $C_{IJ}$ . Les indices  $I$  et  $J$  varient de 1 à 6 en obéissant à la règle suivante :

$$(11) \rightarrow 1, (22) \rightarrow 2, (33) \rightarrow 3, (23) \rightarrow 4, (13) \rightarrow 5, (12) \rightarrow 6.$$

D'autre part, la propagation d'une onde sismique dans un milieu isotrope est décrite par deux paramètres indépendants et les éléments du tenseur élastique correspondant vérifient les relations suivantes :  $C_{11} = C_{33}$ ,  $C_{44} = C_{66}$ ,  $C_{12} = C_{11} - 2C_{66}$  et  $C_{12} = C_{13} = C_{23}$ .

En utilisant cette notation, on peut montrer que le tenseur élastique isotrope s'écrit :

$$c_{ijkl} = (C_{11} - 2C_{66}) \delta_{ij} \delta_{kl} + C_{66} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (2.27)$$

Pour définir une perturbation de ce tenseur élastique, il faut choisir un milieu de référence tel que  $|\delta \mathbf{c}| \ll |\mathbf{c}^0|$  et qui dépend des deux paramètres de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$  :

$$c^0 = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (2.28)$$

avec  $\lambda = C_{11}^0 - 2C_{66}^0$  et  $\mu = C_{66}^0$ .

La perturbation du tenseur élastique s'écrit alors

$$\delta c_{ijkl} = (C_{11} - 2C_{66} - \lambda) \delta_{ij} \delta_{kl} + (C_{66} - \mu) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (2.29)$$

On définit ainsi les perturbations  $\delta\lambda = C_{11} - 2C_{66} - \lambda$  et  $\delta\mu = C_{66} - \mu$ .

On peut également exprimer la perturbation élastique en fonction des perturbations de vitesse d'onde P et S et de la densité

$$\begin{aligned} \delta c_{ijkl} = & 2\rho\alpha^2 \left( \frac{\delta\alpha}{\alpha} \right) \delta_{ij} \delta_{kl} \\ & + 2\rho\beta^2 \left( \frac{\delta\beta}{\beta} \right) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} - 2\delta_{ij} \delta_{kl}) \\ & + \rho\alpha^2 \left( \frac{\delta\rho}{\rho} \right) [\delta_{ij} \delta_{kl} + (\beta/\alpha)^2 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})] \end{aligned} \quad (2.30)$$

## 2.2.2 Matrices et coefficients de scattering

Dans le cas isotrope, la matrice de scattering, s'écrit comme la somme de trois termes associés à chacune des perturbations  $\delta\alpha$ ,  $\delta\beta$  et  $\delta\rho$  :

$$\mathbf{S} = \rho \omega^2 \left( \frac{\delta\alpha}{\alpha} \tilde{\mathbf{S}}^\alpha + \frac{\delta\beta}{\beta} \tilde{\mathbf{S}}^\beta + \frac{\delta\rho}{\rho} \tilde{\mathbf{S}}^\rho \right) \quad (2.31)$$

Pour chacune des perturbations, le tenseur de scattering s'écrit

$$\tilde{\mathbf{S}}^\alpha = -2 \left( \frac{\alpha^2}{c_X' c_X''} \right) \hat{\mathbf{k}}' \hat{\mathbf{k}}'' \quad (2.32)$$

$$\tilde{\mathbf{S}}^\beta = 2 \frac{\beta^2}{c_X' c_X''} \left\{ 2 \hat{\mathbf{k}}'' \hat{\mathbf{k}}' - (\hat{\mathbf{k}}'' \cdot \hat{\mathbf{k}}') \mathbf{I} - \hat{\mathbf{k}}' \hat{\mathbf{k}}'' \right\} \quad (2.33)$$

$$\tilde{\mathbf{S}}^\rho = \mathbf{I} - \left( \frac{\alpha^2 - 2\beta^2}{c_X' c_X''} \right) \hat{\mathbf{k}}' \hat{\mathbf{k}}'' - \left( \frac{\beta^2}{c_X' c_X''} \right) \left\{ \hat{\mathbf{k}}' \hat{\mathbf{k}}'' + (\hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{k}}'') \mathbf{I} \right\} \quad (2.34)$$

avec  $\mathbf{I}$  le tenseur identité d'ordre 2.

Dahlen et al. (2000) ont défini de la façon suivante les coefficients de scattering

$$\Omega_m = - \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{p}}'' \cdot \tilde{\mathbf{S}}^m \cdot \hat{\mathbf{p}}') \quad (2.35)$$

avec  $\hat{\mathbf{p}}'$  le vecteur unitaire de polarisation de l'onde incidente et  $\hat{\mathbf{p}}''$  celui de l'onde diffusée. Si on considère une onde incidente P et une onde diffusée P (P-P scattering) alors  $c_X' = c_X'' = \alpha$  et les vecteurs polarisation correspondent aux vecteurs d'onde ( $\hat{\mathbf{p}} = \hat{\mathbf{k}}$ ). Dans ce

cas, les coefficients de scattering s'écrivent

$$\Omega_{\alpha}^{P \rightarrow P} = 1 \quad (2.36)$$

$$\Omega_{\beta}^{P \rightarrow P} = \frac{1}{2} \frac{\beta^2}{\alpha^2} \{ (\hat{\mathbf{k}}'' \cdot \hat{\mathbf{k}}')^2 - 1 \} \quad (2.37)$$

$$\Omega_{\rho}^{P \rightarrow P} = \frac{1}{2} (1 - \hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{k}}'') - \frac{\beta^2}{\alpha^2} [1 - (\hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{k}}'')^2] \quad (2.38)$$

Les autres types d'interaction (P - S, S - P et S- S) sont traités en Annexe B. Ces diagrammes de diffusion sont représentés sur la figure 2.2. Une perturbation de vitesse  $\delta\alpha$  est donc isotrope pour les ondes P. Par contre, une perturbation  $\delta\beta$  ou  $\delta\rho$  ne diffuse pas d'énergie dans la direction incidente pour les ondes P.

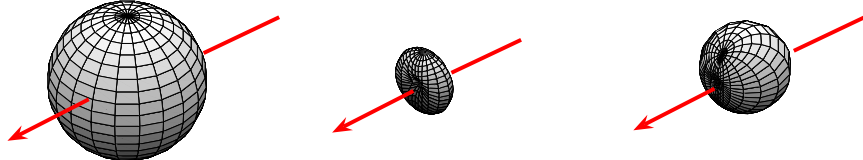


FIG. 2.2 – Diagrammes de radiation pour les perturbations isotropes  $\delta\alpha$ ,  $\delta\beta$  et  $\delta\rho$  dans le cas d'une diffusion P-P. La flèche rouge indique la direction de la polarisation incidente de l'onde P. Les diagrammes ont été calculés pour les vitesses de phases et pour la densité de la graine. L'amplitude relative des diagrammes de radiation n'est pas respectée.

## 2.3 Cas d'une perturbation transverse isotrope

Beaucoup de matériaux géologiques présentent des propriétés anisotropes. L'anisotropie transverse isotrope, caractérisée par un seul axe de symétrie en est la forme la plus simple et elle permet de décrire l'anisotropie de nombreux objets géophysiques.

### 2.3.1 Perturbation du tenseur élastique

Dans un milieu transverse isotrope, l'axe de symétrie désigne une direction particulière que l'on choisit généralement selon l'axe  $\hat{\mathbf{x}}_3$ . Les axes  $\hat{\mathbf{x}}_1$  et  $\hat{\mathbf{x}}_2$  sont alors choisis de façon arbitraire dans un plan perpendiculaire à  $\hat{\mathbf{x}}_3$ . Dans ce système de coordonnées, le tenseur élastique  $c_{ijkl}$  est alors décrit par cinq composantes indépendantes. En utilisant la notation de Voigt, on peut montrer que le tenseur élastique s'écrit (Spies, 1994) :

$$\begin{aligned} c_{ijkl} = & (C_{11} - 2C_{66}) \delta_{ij} \delta_{kl} + C_{66} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \\ & + (C_{13} - C_{11} + 2C_{66}) (\delta_{ij} \hat{s}_k \hat{s}_l + \delta_{kl} \hat{s}_i \hat{s}_j) \\ & + (C_{44} - C_{66}) (\delta_{ik} \hat{s}_j \hat{s}_l + \delta_{il} \hat{s}_j \hat{s}_k + \delta_{jk} \hat{s}_i \hat{s}_l + \delta_{jl} \hat{s}_i \hat{s}_k) \\ & + (C_{11} + C_{33} - 2C_{13} - 4C_{44}) \hat{s}_i \hat{s}_j \hat{s}_k \hat{s}_l \end{aligned} \quad (2.39)$$

avec  $\hat{\mathbf{s}}$  le vecteur unitaire désignant l'axe de symétrie parallèle à  $\hat{\mathbf{x}}_3$ . Cette expression montre que le tenseur élastique transverse isotrope contient à la fois une contribution isotrope qui ne dépend que du tenseur identité isotrope d'ordre 2 et une contribution anisotrope dépendante de  $\hat{\mathbf{s}}$ , c'est à dire de l'orientation de l'axe de symétrie.

### 2.3.2 Définition des paramètres anisotropes

Dans la littérature, on trouve différents paramètres pour décrire l'anisotropie hexagonale. Dans un tel milieu, il faut cinq paramètres indépendants pour décrire la propagation des ondes. On peut par exemple choisir, comme Mensch et Rasolofosaon (1997), la vitesse des ondes P et S le long de l'axe de symétrie et trois autres paramètres anisotropes définis par :

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{(C_{11} - C_{33})}{2\rho\alpha^2} \\ \delta &= \frac{(C_{13} - C_{33} + 2C_{44})}{\rho\alpha^2} \\ \gamma &= \frac{(C_{66} - C_{44})}{2\rho\beta^2} \end{aligned} \quad (2.40)$$

avec  $\rho$  la densité,  $\alpha$  la vitesse des ondes P dans un milieu de référence isotrope, et  $\beta$  la vitesse des ondes S dans ce même milieu de référence. Le paramètre  $\epsilon$  représente l'anisotropie des ondes P, c'est à dire la différence entre la vitesse d'une onde P se propageant perpendiculairement à  $\hat{\mathbf{s}}$  et la vitesse d'une onde P se propageant dans la direction de  $\hat{\mathbf{s}}$ . De même,  $\gamma$  représente l'anisotropie des ondes S. Si l'axe de symétrie est un axe rapide alors  $\epsilon$  et  $\gamma$  sont négatifs. Enfin,  $\delta$  décrit la propagation des ondes P à des angles de propagation intermédiaires par rapport à l'axe de symétrie.

Si on introduit ces paramètres dans (2.39), on obtient :

$$\begin{aligned}
c_{ijkl} = & (C_{11} - 2C_{66}) \delta_{ij} \delta_{kl} + C_{66} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \\
& + 2\rho\alpha^2\epsilon (\hat{s}_i \hat{s}_j \hat{s}_k \hat{s}_l - \delta_{ij} \hat{s}_k \hat{s}_l + \delta_{kl} \hat{s}_i \hat{s}_j) \\
& + 2\rho\beta^2\gamma (2\delta_{ij} \hat{s}_k \hat{s}_l + 2\delta_{kl} \hat{s}_i \hat{s}_j - \delta_{ik} \hat{s}_j \hat{s}_l - \delta_{il} \hat{s}_j \hat{s}_k - \delta_{jk} \hat{s}_i \hat{s}_l - \delta_{jl} \hat{s}_i \hat{s}_k) \\
& + \rho\alpha^2\delta (\delta_{ij} \hat{s}_k \hat{s}_l + \delta_{kl} \hat{s}_i \hat{s}_j - 2\hat{s}_i \hat{s}_j \hat{s}_k \hat{s}_l)
\end{aligned} \tag{2.41}$$

### 2.3.3 Choix de la référence

Il s'agit maintenant de définir un milieu de référence homogène et isotrope qui vérifie la condition  $|\delta\mathbf{c}| = |\mathbf{c} - \mathbf{c}^0| \ll |\mathbf{c}^0|$  et qui ne dépend que des deux paramètres de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$  :

$$c^0 = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \tag{2.42}$$

avec  $\lambda = C_{11}^0 - 2C_{66}^0$  et  $\mu = C_{66}^0$ . La perturbation du tenseur élastique s'écrit alors

$$\begin{aligned}
\delta c_{ijkl} = & (C_{11} - 2C_{66} - \lambda) \delta_{ij} \delta_{kl} + (C_{66} - \mu) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \\
& + 2\rho\alpha^2\epsilon (\hat{s}_i \hat{s}_j \hat{s}_k \hat{s}_l - \delta_{ij} \hat{s}_k \hat{s}_l + \delta_{kl} \hat{s}_i \hat{s}_j) \\
& + 2\rho\beta^2\gamma (2\delta_{ij} \hat{s}_k \hat{s}_l + 2\delta_{kl} \hat{s}_i \hat{s}_j - \delta_{ik} \hat{s}_j \hat{s}_l - \delta_{il} \hat{s}_j \hat{s}_k - \delta_{jk} \hat{s}_i \hat{s}_l - \delta_{jl} \hat{s}_i \hat{s}_k) \\
& + \rho\alpha^2\delta (\delta_{ij} \hat{s}_k \hat{s}_l + \delta_{kl} \hat{s}_i \hat{s}_j - 2\hat{s}_i \hat{s}_j \hat{s}_k \hat{s}_l)
\end{aligned} \tag{2.43}$$

A ce stade, on s'aperçoit qu'il y a une ambiguïté dans le choix du milieu de référence isotrope. En effet, dans un milieu anisotrope homogène, Fedorov (1968) définit le milieu isotrope comme celui qui s'écarte le moins au sens des moindres carrés du milieu anisotrope. Il montre que les paramètres de Lamé qui minimisent la norme de  $\delta\mathbf{c}$  sont donnés par

$$\lambda = \frac{1}{30} (3c_{ikik} - c_{iikk}) \tag{2.44}$$

$$\mu = \frac{1}{15} (2c_{iikk} - c_{ikik}) \tag{2.45}$$

en utilisant la convention de sommation sur les indices répétés. D'autres définitions du milieu de référence sont possibles (Fedorov, 1968). On pourrait également choisir un milieu de référence isotrope mais hétérogène. Puisque le choix de la référence est arbitraire, on peut choisir un milieu de référence à symétrie sphérique et isotrope obéissant à la condition  $|\delta \mathbf{c}| \ll |\mathbf{c}^0|$ .

De façon similaire, il y a une ambiguïté dans la définition de la perturbation des paramètres de Lamé. Par exemple, on peut choisir les perturbations  $\delta\lambda$  et  $\delta\mu$  suivantes

$$\delta\lambda = C_{11} - 2C_{66} - \lambda \quad (2.46)$$

$$\delta\mu = C_{66} - \mu \quad (2.47)$$

si bien que la perturbation du tenseur élastique s'écrit

$$\begin{aligned} \delta c_{ijkl} = & \delta\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \delta\mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \\ & + 2\rho\alpha^2 \epsilon (\hat{s}_i \hat{s}_j \hat{s}_k \hat{s}_l - \delta_{ij} \hat{s}_k \hat{s}_l + \delta_{kl} \hat{s}_i \hat{s}_j) \\ & + 2\rho\beta^2 \gamma (2\delta_{ij} \hat{s}_k \hat{s}_l + 2\delta_{kl} \hat{s}_i \hat{s}_j - \delta_{ik} \hat{s}_j \hat{s}_l - \delta_{il} \hat{s}_j \hat{s}_k - \delta_{jk} \hat{s}_i \hat{s}_l - \delta_{jl} \hat{s}_i \hat{s}_k) \\ & + \rho\alpha^2 \delta (\delta_{ij} \hat{s}_k \hat{s}_l + \delta_{kl} \hat{s}_i \hat{s}_j - 2\hat{s}_i \hat{s}_j \hat{s}_k \hat{s}_l) \end{aligned} \quad (2.48)$$

On peut alors exprimer les perturbations des paramètres de Lamé en fonction des perturbations de vitesse des ondes P et S et de la densité :

$$2\rho\alpha\delta\alpha = \delta\lambda + 2\delta\mu - \delta\rho\alpha^2 \quad (2.49)$$

$$2\rho\beta\delta\beta = \delta\mu - \delta\rho\beta^2 \quad (2.50)$$

Puis, si on néglige les perturbations de densité, on obtient l'expression suivante pour  $\delta c_{ijkl}$

$$\begin{aligned} \delta c_{ijkl} = & 2\rho\alpha^2 \left( \frac{\delta\alpha}{\alpha} \right) \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\rho\beta^2 \left( \frac{\delta\beta}{\beta} \right) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} - 2\delta_{ij} \delta_{kl}) \\ & + 2\rho\alpha^2 \epsilon (\hat{s}_i \hat{s}_j \hat{s}_k \hat{s}_l - \delta_{ij} \hat{s}_k \hat{s}_l + \delta_{kl} \hat{s}_i \hat{s}_j) \\ & + 2\rho\beta^2 \gamma (2\delta_{ij} \hat{s}_k \hat{s}_l + 2\delta_{kl} \hat{s}_i \hat{s}_j - \delta_{ik} \hat{s}_j \hat{s}_l - \delta_{il} \hat{s}_j \hat{s}_k - \delta_{jk} \hat{s}_i \hat{s}_l - \delta_{jl} \hat{s}_i \hat{s}_k) \\ & + \rho\alpha^2 \delta (\delta_{ij} \hat{s}_k \hat{s}_l + \delta_{kl} \hat{s}_i \hat{s}_j - 2\hat{s}_i \hat{s}_j \hat{s}_k \hat{s}_l) \end{aligned} \quad (2.51)$$

On s'aperçoit alors que la perturbation du tenseur élastique contient deux contributions isotropes en  $\delta\alpha$  et  $\delta\beta$  ainsi que trois perturbations purement anisotropes en  $\epsilon$ ,  $\delta$  et  $\gamma$ . Les définitions choisies pour les perturbations des paramètres de Lamé conduisent aux définitions suivantes pour les perturbations de vitesse :

$$\delta\alpha = \frac{C_{11} - C_{11}^0}{2\rho\alpha} \quad (2.52)$$

$$\delta\beta = \frac{C_{66} - C_{66}^0}{2\rho\beta} \quad (2.53)$$



Les perturbations des vitesses isotropes correspondent à la différence entre la vitesse de phase dans le milieu anisotrope pour une direction de propagation perpendiculaire à l’axe de symétrie et la vitesse de phase dans le milieu isotrope de référence. Il faut se souvenir que si le milieu anisotrope est hétérogène, les déviations isotropes par rapport au milieu de référence isotrope varient latéralement. Ainsi, les variations latérales d’anisotropie sismiques produisent des variations latérales apparentes de vitesses isotropes, même si la couverture sismique est parfaite. D’autre part, on sait que d’importants artefacts dans les tomographies isotropes sont introduits par les structures anisotropes qui ont un axe  $\hat{a}$  de l’olivine fortement incliné (Sobolev et al., 1999) : pour un taux d’orientation préférentielle de l’olivine supérieur à 10%, la perturbation de la vitesse des ondes P peut atteindre plus de 2% si l’axe  $\hat{c}$  de l’olivine est incliné. Ces artefacts peuvent même conduire à des erreurs d’interprétations de l’image tomographique en simulant par exemple une structure de slab (Sobolev et al., 1999).

Toutes autres définitions de  $\delta\lambda$  et  $\delta\mu$  conduisent à d’autres définitions des perturbations de vitesses de phase isotropes et du tenseur élastique. D’autre part, elles introduisent des contributions isotropes dans les termes associés aux paramètres anisotropes dans l’expression de la perturbation du tenseur élastique. Par conséquent, cela induit des corrélations entre les paramètres isotropes et anisotropes lors d’une inversion (ces effets de corrélations seront détaillés dans le chapitre 4 sur l’inversion de la structure anisotrope de la graine). Il est donc préférable de définir les perturbations des paramètres de Lamé selon (2.46) et (2.47).

De la même façon, la perturbation du temps de propagation dans un milieu isotrope peut être décrite par la perturbation de la densité  $\rho$  et des paramètres de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ . Elle peut également s’exprimer en fonction de la perturbation de la densité et de la vitesse de phase des ondes P et S. La dérivée de Fréchet pour la densité dépend du choix des paramètres, mais la perturbation de la vitesse des ondes ou du temps de propagation est la même pour une perturbation du milieu donnée que l’on utilise les paramètres  $(\rho, \lambda, \mu)$  ou  $(\rho, \alpha, \beta)$ . De façon similaire, les dérivées de Fréchet  $\epsilon$  et  $\gamma$  dépendent du choix de la définition de la perturbation de la vitesse isotrope, contrairement à la perturbation résultante du temps de propagation.

### 2.3.4 Matrices et coefficients de scattering

Le tenseur de scattering peut être décrit par une somme de cinq tenseurs de scattering associés à chacune des perturbations  $\delta\alpha$ ,  $\delta\beta$ ,  $\epsilon$ ,  $\delta$  et  $\gamma$  :

$$\mathbf{S} = \rho \omega^2 \left( \frac{\delta\alpha}{\alpha} \tilde{\mathbf{S}}^\alpha + \frac{\delta\beta}{\beta} \tilde{\mathbf{S}}^\beta + \epsilon \tilde{\mathbf{S}}^\epsilon + \delta \tilde{\mathbf{S}}^\delta + \gamma \tilde{\mathbf{S}}^\gamma \right) \quad (2.54)$$

En introduisant (2.51) dans la définition générale du tenseur de scattering, on obtient :

$$\tilde{\mathbf{S}}^\epsilon = \frac{\alpha^2}{c'_X c''_X} \left\{ 2 (\hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{s}}) \hat{\mathbf{k}}'' \hat{\mathbf{s}} + 2 (\hat{\mathbf{k}}'' \cdot \hat{\mathbf{s}}) \hat{\mathbf{s}} \hat{\mathbf{k}}' - 2 (\hat{\mathbf{k}}'' \cdot \hat{\mathbf{s}}) (\hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{s}}) \hat{\mathbf{s}} \hat{\mathbf{s}} \right\} \quad (2.55)$$

$$\tilde{\mathbf{S}}^\delta = \frac{\alpha^2}{c'_X c''_X} \left\{ 2 (\hat{\mathbf{k}}'' \cdot \hat{\mathbf{s}}) (\hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{s}}) \hat{\mathbf{s}} \hat{\mathbf{s}} - (\hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{s}}) \hat{\mathbf{k}}'' \hat{\mathbf{s}} - (\hat{\mathbf{k}}'' \cdot \hat{\mathbf{s}}) \hat{\mathbf{s}} \hat{\mathbf{k}}' \right\} \quad (2.56)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{S}}^\gamma = \frac{\beta^2}{c'_X c''_X} \{ & -2 (\hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{s}}) [2 \hat{\mathbf{k}}'' \hat{\mathbf{s}} - \hat{\mathbf{s}} \hat{\mathbf{k}}''] - 2 (\hat{\mathbf{k}}'' \cdot \hat{\mathbf{s}}) [2 \hat{\mathbf{s}} \hat{\mathbf{k}}' - \hat{\mathbf{k}}' \hat{\mathbf{s}}] \\ & + 2 (\hat{\mathbf{k}}'' \cdot \hat{\mathbf{s}}) (\hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{s}}) \mathbf{I} + 2 (\hat{\mathbf{k}}'' \cdot \hat{\mathbf{k}}') \hat{\mathbf{s}} \hat{\mathbf{s}} \} \end{aligned} \quad (2.57)$$

avec  $\mathbf{I}$  le tenseur identité d'ordre 2,  $\hat{\mathbf{s}}$  le vecteur unitaire pointant dans la direction de l'axe de symétrie, ainsi que  $\alpha$  et  $\beta$  la vitesse de phase des ondes P et S au point diffractant  $X$  dans le milieu de référence.

Comme dans le cas isotrope, on définit alors les coefficients de Rayleigh (Dahlen et al., 2000) :

$$\Omega_m = - \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{p}}'' \cdot \tilde{\mathbf{S}}^m \cdot \hat{\mathbf{p}}') \quad (2.58)$$

avec  $\hat{\mathbf{p}}'$  le vecteur unitaire de polarisation de l'onde incidente et  $\hat{\mathbf{p}}''$  celui de l'onde diffusée. Dans le cas d'une diffusion P-P (les autres cas sont traités en Annexe B),  $\hat{\mathbf{p}}' = \hat{\mathbf{k}}'$  et  $\hat{\mathbf{p}}'' = \hat{\mathbf{k}}''$  avec  $c'_X = c''_X = \alpha$  et les coefficients anisotropes ont l'expression suivante :

$$\Omega_\epsilon^{P \rightarrow P} = \frac{1}{2} \left\{ 2 (\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{k}}')^2 (\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{k}}'')^2 - 2 (\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{k}}')^2 - 2 (\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{k}}'')^2 \right\} \quad (2.59)$$

$$\Omega_\delta^{P \rightarrow P} = \frac{1}{2} \left\{ [1 - (\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{k}}'')^2] (\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{k}}')^2 + [1 - (\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{k}}')^2] (\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{k}}'')^2 \right\} \quad (2.60)$$

$$\Omega_\gamma^{P \rightarrow P} = \frac{1}{2} \frac{\beta^2}{\alpha^2} \left\{ 2 (\hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{s}})^2 + 2 (\hat{\mathbf{k}}'' \cdot \hat{\mathbf{s}})^2 - 4 (\hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{s}}) (\hat{\mathbf{k}}'' \cdot \hat{\mathbf{s}}) (\hat{\mathbf{k}}'' \cdot \hat{\mathbf{k}}') \right\} \quad (2.61)$$

Les coefficients  $\Omega_\epsilon$  et  $\Omega_\delta$  dépendent à la fois de l'angle entre la direction de propagation incidente et l'axe de symétrie, et de l'angle entre la direction de propagation de l'onde diffusée et l'axe de symétrie.  $\Omega_\gamma$  dépend également de l'angle de diffusion.

La figure 2.3 montre les trois diagrammes anisotropes pour sept directions incidentes par rapport à l'axe de symétrie qui est placé selon  $\hat{\mathbf{z}}$ . L'amplitude de  $\Omega_\epsilon$  est toujours

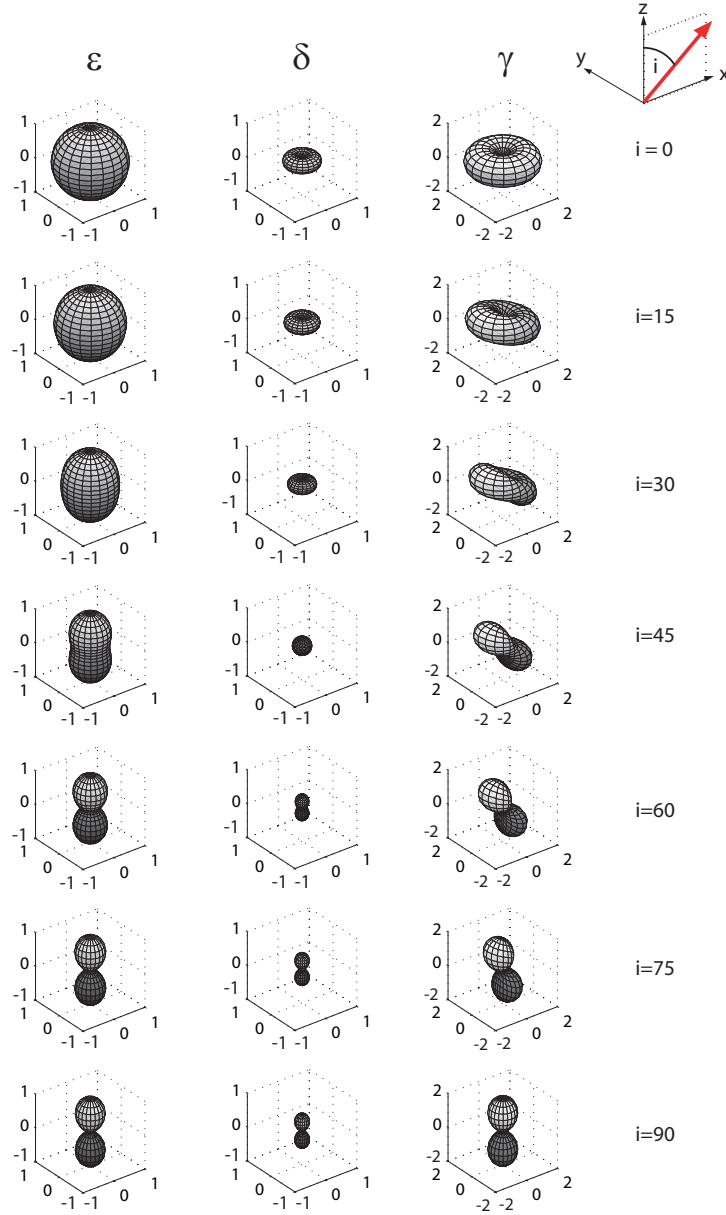


FIG. 2.3 – Diagramme de radiation pour les trois paramètres anisotropes  $\epsilon$  (colonne 1),  $\delta$  (colonne 2) et  $\gamma$  (colonne 3). L'échelle est la même pour tous les diagrammes. Les axes sont centrés sur l'hétérogénéité, et l'axe vertical  $\hat{z}$  correspond à l'axe de symétrie. La direction de propagation est contenue dans le plan  $(\hat{x}, \hat{z})$ . Les diagrammes ont été tracés pour des angles d'incidence par rapport à l'axe de symétrie variant de  $0^\circ$  (haut) à  $90^\circ$  (bas) avec un pas de  $15^\circ$ .

négative tandis que celles de  $\Omega_\delta$  et  $\Omega_\gamma$  sont positives. Les diagrammes de  $\epsilon$  et  $\delta$  présentent une symétrie de rotation autour de l'axe  $\hat{\mathbf{s}}$ . Par contre, les lobes de maximum de radiation de  $\gamma$  sont toujours perpendiculaires à la direction incidente. Ainsi, une perturbation  $\gamma$  ne diffuse pas d'énergie dans la direction de propagation pour une onde P et pourra donc être négligée ultérieurement. Quand l'onde est polarisée selon l'axe de symétrie,  $\Omega_\epsilon$  est isotrope tandis que l'énergie diffusée dans la direction incidente est nulle pour  $\delta$ . De plus, quand l'onde est polarisée à  $45^\circ$  de l'axe de symétrie, le diagramme de  $\delta$  devient isotrope. Enfin, quand l'onde incidente se propage à  $90^\circ$  de l'axe de symétrie, deux lobes apparaissent le long de  $\hat{\mathbf{s}}$  dans les diagrammes de  $\epsilon$  et  $\delta$  et il n'y a donc pas de diffusion de l'énergie dans la direction incidente. L'allure des diagrammes de diffusion de  $\epsilon$  et  $\gamma$  dépend de la définition des perturbations isotropes de vitesse  $\delta\alpha$  et  $\delta\beta$ .

## 2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré que, dans le cadre de l'approximation de Born, on pouvait définir des matrices de scattering décrivant la diffusion d'une onde de volume P ou S par une perturbation élastique. L'amplitude du champ de déplacement diffusé est fonction du type de perturbation. Il faut cinq matrices de scattering pour décrire la diffusion des ondes de volume par une perturbation transverse isotrope du milieu. Pour décrire correctement une perturbation transverse isotrope, il faut introduire les perturbations isotropes des vitesses de phase  $\alpha$  et  $\beta$  et trois paramètres anisotropes  $\epsilon$ ,  $\delta$  et  $\gamma$ . Il apparaît donc qu'un milieu anisotrope puisse générer des variations latérales apparentes des vitesses isotropes. Ainsi, des variations de vitesse isotrope peuvent être associées à des variations de température, de composition chimique mais aussi d'anisotropie. Ainsi, de plus en plus d'images tomographiques prennent en compte les effets de l'anisotropie lors des inversions.

Pour le calcul d'un modèle tomographique, on inverse la perturbation des temps de propagation pour remonter à la perturbation des paramètres sismiques par rapport à un modèle de référence. Une des méthodes pour mesurer cette perturbation du temps de propagation est de procéder à la cross-corrélation entre le signal observé et un signal synthétique calculé dans un milieu de référence. Dans le chapitre suivant nous examinerons comment cette cross-corrélation relie la perturbation du champ de déplacement à la perturbation du temps de propagation. On définit ainsi le noyau de sensibilité pour la perturbation du temps de propagation pour chaque perturbation élastique. Nous examinerons la structure de ces noyaux pour une onde PKP(DF) dans la graine.



## Chapitre 3

# Noyaux de sensibilité pour les ondes PKP(DF)

En sismologie courte période, on utilise souvent la théorie des rais. On considère qu'entre la source et le récepteur, l'onde suit le trajet prédit par l'optique géométrique. En surface, on observe alors l'intégrale des propriétés sismiques le long du rai. Par conséquent, une anomalie de vitesse située hors du rai ne peut pas contribuer à la forme d'onde, c'est-à-dire au signal enregistré au récepteur. La théorie des rais est valable dans l'hypothèse de fréquence infinie, ce qui correspond à des ondes de très courte longueur d'onde par rapport aux hétérogénéités échantillonnées par le rai. Ainsi, on considère que cette théorie reste valable tant que les anomalies sont de taille supérieure à la longueur d'onde. Cependant, les ondes téléseismiques présentent un contenu fréquentiel fini avec des périodes dominantes jusqu'à quelques dizaines de seconde.

Par ailleurs, on sait qu'une onde qui se propage entre la source et le récepteur avec une différence de marche faible par rapport à l'onde suivant la trajectoire prédite par la théorie des rais, peut interférer de façon constructive avec l'onde directe. Elle peut donc contribuer à la forme d'onde enregistrée au récepteur. On définit ainsi les zones de Fresnel, c'est-à-dire les régions où la sensibilité n'est pas nulle et qui correspond à une différence de marche faible par rapport au rai de référence. Cependant, chaque point du volume de Fresnel ne contribue pas de la même façon à la forme d'onde enregistrée en surface.

Pour évaluer la sensibilité des ondes hors du rai, on considère que l'onde rencontre une hétérogénéité. Cette dernière diffracte l'énergie de l'onde et agit comme une source secondaire (voir chapitre 2). La forme d'onde observée au récepteur résulte de l'ensemble de ces ondes diffusées dans le volume de Fresnel. Les noyaux de sensibilité permettent de décrire la répartition spatiale de la sensibilité de l'onde à une perturbation donnée. Les

noyaux de sensibilité sont associés à une perturbation du modèle (isotrope ou anisotrope), à un type d'onde (ondes de volumes ou ondes de surface) et à une observable sismique. Ainsi, ces noyaux ont été construits principalement pour trois types d'observable sismique : le temps de propagation en milieu isotrope et anisotrope (Dahlen et al., 2000; Hung et al., 2000), l'amplitude des ondes (Dahlen et Baig, 2002) ou encore l'intensité du splitting des ondes SKS (Favier et Chevrot, 2003). Nous proposons de construire les noyaux de sensibilité pour le temps de propagation dans un milieu transverse isotrope (Calvet et al., 2006a).

Plusieurs approches ont été utilisées pour construire les noyaux de sensibilité. Li et Tanimoto (1993) ont utilisé l'approximation de Born pour modéliser la perturbation de la forme d'onde dans un modèle faiblement hétérogène dans le cadre de la théorie des modes couplés. Cette approche permet d'obtenir dans un cadre "asymptotique" les noyaux de sensibilité 2D (dans le plan d'incidence contenant la source et le récepteur) pour la forme d'onde, et elle sera mise en oeuvre par Li et Romanowicz (1995) pour inverser la structure 3D de la Terre. Marquering et al. (1999) proposent d'évaluer la perturbation du champ de déplacement par sommation de modes et associent la construction des noyaux de sensibilité à une mesure de la perturbation du temps de propagation par cross-corrélation. Dahlen et al. (2000) abandonnent l'approche par sommation de modes et utilisent la théorie des rais pour calculer la perturbation du champ de déplacement dans le cadre de l'approximation de Born. Cette méthode est beaucoup plus efficace en terme de temps de calcul. Enfin, Tromp et al. (2005) proposent de calculer les noyaux de sensibilité par la méthode du "champ adjoint".

Dans ce chapitre, nous examinerons comment relier la **perturbation du champ de déplacement** à la **perturbation du temps de propagation** quel que soit le type de perturbation. Nous utiliserons l'approche théorique de Dahlen et al. (2000) pour développer l'expression des noyaux de sensibilité dans le cas d'un milieu isotrope et transverse isotrope. Enfin, nous décrirons la méthode numérique mise en oeuvre. Ce chapitre sera principalement illustré avec les noyaux de sensibilité isotropes et anisotropes des ondes PKP(DF) (encore apellées PKIKP) dans la graine.

### 3.1 Mesure de la perturbation du temps de propagation par cross-corrélation

On se donne un modèle de Terre de référence isotrope décrivant les variations en profondeur de la densité  $\rho$  et de la vitesse des ondes P et S,  $\alpha$  et  $\beta$  respectivement. On peut alors calculer un sismogramme synthétique  $u^0(t)$  de référence, pour une phase donnée et une distance épacentrale donnée. Comment peut-on relier la perturbation du temps de propagation  $\delta T$  aux perturbations des paramètres du modèle ( $\delta\rho, \delta\alpha, \delta\beta$ ) dans le cas isotrope ou ( $\delta\alpha, \delta\beta, \epsilon, \delta, \gamma$ ) dans le cas transverse isotrope ?

Marquering et al. (1999) mentionnent qu'il est souhaitable d'utiliser dans les inversions des mesures de perturbation du temps de propagation réalisées par cross-corrélation d'un signal observé et d'un synthétique calculé dans une modèle de référence. En effet, la perturbation de la forme d'onde affecte la cross-corrélation.

On considère une phase qui arrive dans l'intervalle de temps  $[t_1, t_2]$ . On effectue la cross-corrélation entre le signal observé  $u^{obs}(t)$  et le synthétique calculé dans le modèle de référence :

$$Cor(\tau) = \int_{t_1}^{t_2} u^0(t - \tau) u^{obs}(t) dt \quad (3.1)$$

Dans le cadre de l'approximation de Born, le signal observé correspond à

$$u^{obs}(t) = u^0(t) + \delta u(t) \quad (3.2)$$

De même, on considère une perturbation du premier ordre de la corrélation entre le signal observé et le signal synthétique

$$Cor(\tau) = cor(\tau) + \delta cor(\tau) \quad (3.3)$$

avec

$$cor(\tau) = \int_{t_1}^{t_2} u^0(t - \tau) u^0(t) dt \quad (3.4)$$

$$\delta cor(\tau) = \int_{t_1}^{t_2} u^0(t - \tau) \delta u(t) dt \quad (3.5)$$

Pratiquement, la perturbation du temps de propagation  $\delta T = T^{obs} - T$  du signal perturbé par rapport au signal non perturbé est déterminée en recherchant le maximum de la



corrélation. La corrélation du signal non perturbé est maximale en  $\tau = 0$  et  $\partial_\tau \text{cor}(0) = 0$ . On effectue un développement de Taylor au voisinage du maximum de corrélation du signal non perturbé :

$$\text{Cor}(\delta\tau) = \text{cor}(0) + \delta\tau \partial_\tau \text{cor}(0) + \frac{1}{2} \delta\tau^2 \partial_\tau^2 \text{cor}(0) + \delta \text{cor}(0) + \delta\tau \partial_\tau \delta \text{cor}(0) \quad (3.6)$$

$$= \text{cor}(0) + \frac{1}{2} \delta\tau^2 \partial_\tau^2 \text{cor}(0) + \delta \text{cor}(0) + \delta\tau \partial_\tau \delta \text{cor}(0) \quad (3.7)$$

Le maximum de  $\text{Cor}(\delta\tau)$  est donné par les zéros de la dérivée de  $\text{Cor}(\delta\tau)$  par rapport à  $\delta\tau$  :

$$\partial_{\delta\tau} \left[ \text{cor}(0) + \frac{1}{2} \delta\tau^2 \partial_\tau^2 \text{cor}(0) + \delta \text{cor}(0) + \delta\tau \partial_\tau \delta \text{cor}(0) \right] = 0 \quad (3.8)$$

soit

$$\delta\tau = - \frac{\partial_\tau \delta \text{cor}(0)}{\partial_\tau^2 \text{cor}(0)} \quad (3.9)$$

En identifiant  $\delta T = \delta\tau$  on obtient

$$\delta T = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \dot{u}^0(t) \delta u(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} \ddot{u}^0 u^0 dt} \quad (3.10)$$

On peut exprimer cette perturbation du temps de propagation dans le domaine fréquentiel en utilisant le théorème de Parseval

$$\delta T = \frac{\mathcal{R}e \int_0^\infty i\omega u^0(\omega)^* \delta u(\omega) d\omega}{\int_0^\infty \omega^2 |u^0(\omega)|^2 d\omega} \quad (3.11)$$

Si  $\delta T < 0$ , l'onde observée est en avance sur l'onde de référence, et si  $\delta T > 0$  alors l'onde observée est en retard.

## 3.2 Noyaux de Sensibilité pour le temps de propagation

### 3.2.1 Définition

Le noyau de sensibilité est défini pour une **observable sismique** et pour une **perturbation donnée du modèle**. Nous nous intéressons aux noyaux de sensibilité pour le temps de propagation (le cas des noyaux de sensibilité pour l'amplitude est traité en

Annexe C). D'autre part, dans l'intervalle de temps  $[t_1, t_2]$  considéré, en fonction de la position relative de la source, du point diffractant et du récepteur, plusieurs phases diffusées peuvent être enregistrées. Il faudra donc tenir compte de toutes ces contributions pour le calcul du noyau.

Pour dériver l'expression des noyaux de sensibilité nous considérerons qu'une seule phase est enregistrée dans l'intervalle de temps  $[t_1, t_2]$ . Si l'on introduit l'expression de  $u_0$  du champ de déplacement dans le milieu de référence et du champ perturbé  $\delta u$  (voir chapitre 2) dans l'expression (3.11), et en inversant l'ordre des intégrales sur le volume des points diffractants et sur les fréquences, on obtient que la perturbation  $\delta T$  s'écrit :

$$\delta T = \int_V \sum_m \left( \frac{\delta m}{m} \right) K_m dV \quad (3.12)$$

$K_m$  est le noyaux de sensibilité relatif à la perturbation du temps de propagation absolu pour une perturbation  $\delta m$  :

$$K_m = -\frac{1}{2\pi} N \Omega_m \left( \frac{1}{c'c''} \right)^{1/2} \left( \frac{\mathcal{R}}{c_R \mathcal{R}' \mathcal{R}''} \right) \times \frac{\int_0^\infty \omega^3 |\dot{s}(\omega)|^2 \sin[\omega(T' + T'' - T) - (M' + M'' - M)\pi/2] d\omega}{\int_0^\infty \omega^2 |\dot{s}(\omega)|^2 d\omega} \quad (3.13)$$

$N$  est un nombre sans dimension :

$$N = \left( \frac{\Lambda'}{\Lambda} \right) \left( \frac{Y''}{Y} \right) \left( \frac{\Pi' \Pi''}{\Pi} \right) \quad (3.14)$$

(voir chapitre 2 pour les définitions de  $\Lambda$ ,  $Y$  et  $\Pi$ ). Si la fonction source correspond à une dérivée  $n^{eme}$  de gaussienne :

$$|\dot{s}(\omega)|^2 = \frac{\omega^{2n} \tau_c^2}{4\pi} e^{-\omega^2 \tau_c^2 / 8\pi^2} \quad (3.15)$$

alors il existe une solution analytique à l'intégrale sur les fréquences (Favier et Chevrot, 2003).  $\tau_c$  est la période caractéristique de l'onde que l'on peut associer à la période dominante ou visuelle  $T_d = \tau_c / \sqrt{2n}$ . Le volume de Fresnel (ou la première zone de Fresnel) correspond à l'ensemble des points diffractants vérifiant  $|T'' + T' - T| \leq T_d/2$ .

### 3.2.2 Domaine de validité

Pour obtenir l'expression des noyaux de sensibilité pour la perturbation du temps de propagation absolu, on a effectué deux approximations successives.

- la relation entre la perturbation du temps de propagation et la perturbation du modèle  $\delta m$  a été linéarisée. On obtient donc les dérivées de Fréchet à l'ordre 1 :  $\partial T / \partial \delta m$  et  $\partial(\Delta T) / \partial \delta m$ .
- on a ensuite utilisé l'approximation géométrique du tenseur de Green en champ lointain.

La linéarisation de la perturbation du temps de propagation implique que la perturbation du modèle doit être suffisamment faible devant le modèle de référence :  $|\delta m| \ll m^0$ . Dans le cadre de l'approximation de Born, cette relation dépend de la fréquence et de la longueur d'onde dominante, ainsi que de la taille caractéristique des hétérogénéités et de la distance de propagation entre la source et le récepteur. En pratique, pour que la relation linéaire soit valable, il faut que la perturbation du temps de propagation soit petite devant la période de l'onde dominante (Hung et al., 2000).

Cependant, la théorie géométrique des rais ne permet pas de décrire la diffraction des ondes par des discontinuités. Si on utilise l'expression géométrique du tenseur de Green pour dériver l'expression des noyaux de sensibilité alors on ne pourra pas décrire correctement le cas des ondes ayant une incidence rasante à la CMB ou à l'ICB. Enfin, comme on a utilisé l'expression du tenseur de Green en champ lointain, on ne pourra pas décrire correctement la propagation des ondes au voisinage de la source et du récepteur. Il faudra alors tenir compte des autres termes (champ intermédiaire en  $1/r^2$ , champ proche en  $1/r^3$  et champ local en  $1/r^4$ ) pour construire correctement les noyaux de sensibilité (Aki et Richards, 1980; Favier et al., 2004).

Dans le paragraphe suivant, on montrera qu'à partir des noyaux de sensibilité, on retrouve bien l'expression de la perturbation du temps de propagation dans le cadre de la théorie des rais.

### 3.2.3 Réduction à la théorie des rais

Afin de retrouver la théorie des rais et l'expression de la vitesse de propagation des ondes P, on applique l'approximation de phase stationnaire. Dans ce paragraphe, on notera  $\alpha$  la vitesse des ondes P dans un milieu de référence isotrope et  $V_P$  la vitesse des ondes P dans un milieu quelconque. Nous appliquerons les résultats obtenus au cas de la propagation des ondes P dans un milieu transverse isotrope.

Dans le cadre de l'approximation de phase stationnaire, on montre que la matrice de scattering est liée à la matrice de Christoffel. Les points stationnaires correspondent aux points sur le rai sismique, si bien que les vecteurs d'onde et de polarisation de l'onde

incidente et diffusée y sont égaux  $\hat{\mathbf{k}}'' = \hat{\mathbf{k}}' = \hat{\mathbf{k}}$  et  $\hat{\mathbf{p}}'' = \hat{\mathbf{p}}' = \hat{\mathbf{p}}$ . De plus, le vecteur de polarisation de l'onde P est colinéaire au vecteur d'onde  $\hat{\mathbf{p}} = \hat{\mathbf{k}}$ . Ainsi, la diffusion sur le rai d'une perturbation élastique s'écrit

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \tilde{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = -\frac{\omega^2}{\alpha^2} [\hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{k}} : \delta \mathbf{c} : \hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{k}}] \quad (3.16)$$

avec  $\alpha$  la vitesse de l'onde P au point diffractant dans le milieu de référence.

D'autre part, en utilisant les relations de symétrie du tenseur élastique, on peut définir ainsi la perturbation de la matrice de Christoffel :

$$\delta \Gamma = \hat{\mathbf{k}} \cdot \delta \mathbf{c} \cdot \hat{\mathbf{k}} \quad (3.17)$$

La perturbation à l'ordre 1 de la matrice de Christoffel a été étudiée en détail par Jech et Pšenčík (1989), Chapman et Pratt (1992) et Mensch et Rasolofosaon (1997). Les vecteurs propres  $\hat{\mathbf{k}}$  et les valeurs propres  $\delta V_P$  sont les solutions de l'équation

$$\delta \Gamma \cdot \hat{\mathbf{k}} = 2 \rho \alpha \delta V_P \hat{\mathbf{k}} \quad (3.18)$$

avec  $\delta V_P = V_P - \alpha$  la perturbation de vitesse d'onde P dans le milieu perturbé.

Le tenseur de scattering est donc relié à la matrice de Christoffel

$$-\frac{1}{2} (\hat{\mathbf{k}} \cdot \tilde{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{k}}) = \rho \omega^2 \frac{\delta V_P}{\alpha} \quad (3.19)$$

Si la perturbation élastique du milieu est décrite par divers paramètres  $m_i$  auxquels on associe une matrice de scattering  $\tilde{\mathbf{S}}^{m_i}$  et le coefficient de Rayleigh correspondant  $\Omega_{m_i}$ , alors on obtient

$$\rho \omega^2 \frac{\delta V_P}{\alpha} = \rho \omega^2 \sum_i \frac{\delta m_i}{m_i} \Omega_{m_i}^{P \rightarrow P} \quad (3.20)$$

On rappelle que dans le cas de la propagation des ondes P, on pourra négliger les termes de conversion P-S et S-P qui ont une amplitude négligeable lors de la diffusion en forward scattering.

Cherchons maintenant à retrouver l'expression de la perturbation du temps de propagation dans l'approximation géométrique du rai. A partir de l'expression de la perturbation  $\delta T$  obtenue avec les noyaux de sensibilité, en inversant l'ordre des intégrales sur la fréquence et le volume des points diffractants, on a :

$$\delta T = \left\{ \frac{\int_0^{+\infty} \omega^3 |\dot{s}(\omega)|^2 d\omega \int_V -\frac{1}{2\pi} \frac{\sum (\delta m_i / m_i) \Omega_{m_i}^{P \rightarrow P}}{\alpha_X \alpha_R} \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{R}' \mathcal{R}''} \sin[\omega(T' + T'' - T)] dV}{\int_0^{+\infty} \omega^2 |\dot{s}(\omega)|^2 d\omega} \right\} \quad (3.21)$$

Décomposons l'intégrale sur le volume en une intégrale sur la surface d'une sphère  $S$  centrée sur l'origine du repère cartésien général et en une intégrale sur le rayon  $r$ . On introduit alors un repère sphérique local  $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$  dont l'origine est à l'intersection entre le rai et la sphère  $S$ . Le Jacobien de la transformation du repère cartésien général  $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$  vers  $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$  est (Cervený, 2001) :

$$J = 1 + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} \theta + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \phi} \phi \quad (3.22)$$

Sur le rai géométrique,  $\theta = \phi = 0$  et  $J = 1$ . On applique l'approximation de phase stationnaire sur l'intégrale surfacique, et après simplification, on obtient

$$\delta T = - \int \frac{1}{\alpha \alpha_R} \frac{\tilde{\mathcal{R}}}{\tilde{\mathcal{R}}' \tilde{\mathcal{R}}''} \frac{(\delta V_P / \alpha)}{\sqrt{|\det \Phi_{ij}|}} dr \quad (3.23)$$

avec

$$\Phi_{ij} = \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta \partial \phi} \right)_{\theta=0, \phi=0} \quad (3.24)$$

$\Phi_{ij}$  est le Hessien de  $\Phi = T' + T'' - T$  évalué au point stationnaire  $\theta = \phi = 0$ .  $\tilde{\mathcal{R}}, \tilde{\mathcal{R}}', \tilde{\mathcal{R}}''$  sont les coefficients d'expansion géométrique au point diffractant,  $\alpha$  est la vitesse de l'onde P sur le rai de référence au rayon  $r$ , et  $\alpha_R$  la vitesse au récepteur dans le milieu de référence. Si on suppose que la source est en surface, on peut en déduire à l'aide du théorème de réciprocité (Dahlen et al., 2000; Cervený, 2001) que

$$\tilde{\mathcal{R}}' \tilde{\mathcal{R}}'' \alpha_R^2 \sqrt{|\det \Phi_{ij}|} = \alpha_R \tilde{\mathcal{R}} \cos i \quad (3.25)$$

avec  $i$  l'angle entre le rai et le rayon  $r$ .

Enfin, en utilisant (3.33), on retrouve la perturbation du temps de propagation dans le cadre de la théorie des rais

$$\delta T = - \int \frac{\delta V_P}{\alpha^2} ds \quad (3.26)$$

avec  $s$  l'abscisse curviligne.

Examinons maintenant le cas de la propagation des ondes P dans un milieu transverse isotrope. Les coefficients de scattering  $\Omega_{\alpha, \beta, \epsilon, \delta, \gamma}^S$  au point stationnaire sont

$$\Omega_{\alpha}^S = - \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{k}} \cdot \tilde{\mathbf{S}}^{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{k}}) = 1 \quad (3.27)$$

$$\Omega_{\beta}^S = - \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{k}} \cdot \tilde{\mathbf{S}}^{\beta} \cdot \hat{\mathbf{k}}) = 0 \quad (3.28)$$

$$\Omega_{\epsilon}^S = - \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{k}} \cdot \tilde{\mathbf{S}}^{\epsilon} \cdot \hat{\mathbf{k}}) = \sin^4 \theta - 1 \quad (3.29)$$

$$\Omega_{\delta}^S = - \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{k}} \cdot \tilde{\mathbf{S}}^{\delta} \cdot \hat{\mathbf{k}}) = \sin^2 \theta \cos^2 \theta \quad (3.30)$$

$$\Omega_{\gamma}^S = - \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{k}} \cdot \tilde{\mathbf{S}}^{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{k}}) = 0 \quad (3.31)$$

Dans ces expressions,  $\theta$  est l'angle entre la polarisation de l'onde incidente et l'axe de symétrie. Ainsi, en combinant (3.19), (3.27), (3.28), (3.29), (3.30) et (3.31), on peut écrire que la perturbation de vitesse des ondes P est

$$\frac{\delta V_P}{\alpha} = \frac{\delta \alpha}{\alpha} + \epsilon \sin^4 \theta - \epsilon + \delta \sin^2 \theta \cos^2 \theta \quad (3.32)$$

donc

$$V_P = \alpha + \delta V_P = \alpha \left( 1 - \epsilon + \epsilon \sin^4 \theta + \delta \sin^2 \theta \cos^2 \theta \right) + a_0 \quad (3.33)$$

avec  $a_0$  la perturbation isotrope d'onde P.

Si on considère que l'anisotropie est faible ( $\epsilon \ll 1$ )

$$V_P = \alpha(1 - \epsilon) \left[ 1 + \epsilon \sin^4 \theta + \delta \sin^2 \theta \cos^2 \theta \right] + a_0 \quad (3.34)$$

avec  $\alpha(1 - \epsilon)$  la vitesse des ondes P le long de l'axe de symétrie. On retrouve bien la même expression dans Mensch et Rasolofosaon (1997).

### 3.3 Mise en oeuvre numérique

Pour calculer les noyaux de sensibilité, il faut donc calculer le temps de propagation  $T$  de l'onde de référence entre la source et le récepteur, le coefficient d'expansion géométrique  $\mathcal{R}$  et le produit de réflexion/transmission  $\Pi$ . De plus, pour chacune des positions des points diffractants, il faut calculer le temps de propagation de l'onde incidente  $T'$  entre la source et le point diffractant et de l'onde diffusée  $T''$  entre le point diffractant et le récepteur, les coefficients d'expansion géométrique  $\mathcal{R}'$  et  $\mathcal{R}''$ , les coefficients de réflexion/transmission  $\Pi'$  et  $\Pi''$  et les coefficients de scattering. Enfin, il faut calculer l'intégrale sur les fréquences.

#### 3.3.1 Elaboration des tables

Afin de calculer les temps de propagation dans un modèle de référence, nous avons appliqué la méthode décrite par Buland et Chapman (1983). Il s'agit de générer des tables donnant accès au temps de parcours d'une phase donnée, pour une distance épacentrale donnée et pour une certaine profondeur de la source.

Généralement, les hodochrones qui donnent pour chaque phase le temps de propagation  $T(\Delta)$ , nous indiquent les phases successives que l'on peut enregistrer. Les rais sismiques, perpendiculaires au front d'onde, permettent de décrire simplement la propagation de l'onde dans le cadre de l'approximation à fréquence infinie. Le paramètre de rai, qui

est défini par l'inclinaison du rai par rapport à la verticale à la source et par la vitesse locale, est constant le long du rai d'après la loi de Descartes. Le paramètre de rai s'écrit  $p = \sin i(z)/v(z)$  dans un milieu plan et  $p_s = r \sin i(r)/v(r)$  dans une Terre sphérique.  $i$  est l'inclinaison du rai par rapport à la verticale et  $v$  la vitesse de phase de l'onde qui varient avec la profondeur. Si on connaît l'inclinaison du rai à la source, on peut savoir où et quand l'onde émergera. Il suffit de calculer les intégrales suivantes (pour une source en surface et dans un milieu plan) :

$$X(p) = 2 \int_0^{z_{bas}} \frac{p}{\sqrt{u^2 - p^2}} dz \quad (3.35)$$

$$\tau(p) = 2 \int_0^{z_{bas}} \sqrt{u^2 - p^2} dz \quad (3.36)$$

avec  $u(z) = 1/v(z)$  la lenteur et  $z_{bas}$  la profondeur du point le plus bas du rai de paramètre  $p$ .  $X(p)$  correspond à la distance épacentrale pour une paramètre de rai  $p$  donné et  $\tau(p)$  correspond au temps d'intercept de l'hodochrone pour  $X = 0$ .  $X(p)$  et  $\tau(p)$  sont reliés au temps de propagation  $T(p)$  par l'expression suivante :

$$T(p) = \tau(p) + pX(p) \quad (3.37)$$

Pour une valeur de  $p$  donnée, il existe une seule valeur possible de  $X(p)$  et de  $\tau(p)$ .

Pour un paramètre  $p_j$ , on calcule  $X_{ij}(p_j)$  et  $\tau_{ij}(p_j)$  correspondant à une épaisseur de couche  $\Delta z_i$ . On a donc besoin d'un modèle de référence. Dans un modèle de Terre sphériques, pour résoudre les équations (3.35) et (3.36), il faudra effectuer la transformation (Muller, 1971; Buland et Chapman, 1983) :

$$x = R_O \Delta \quad (3.38)$$

$$z = R_0 \ln(R_0/r) \quad (3.39)$$

$$v(z) = (R_0/r)v(r) \quad (3.40)$$

avec  $R_0$  le rayon terrestre et  $\Delta$  la distance angulaire en radians. L'équation (3.36) s'écrit alors :

$$\tau(p) = 2 \int_{R_0}^{r_{bas}} \sqrt{\eta_s^2 - p_s^2} dr \quad (3.41)$$

avec la lenteur angulaire  $\eta_s = r/v(r)$  et le paramètre de rai angulaire  $p_s = r \sin(i(r))/v(r) = R_0 p$ . Ce type de transformation pose cependant un problème au centre du modèle sphérique quand  $r \rightarrow 0$ . Pour résoudre la difficulté numérique, il faut choisir une loi d'interpolation du modèle de vitesse telle que (3.41) ait une solution analytique. En effet, on

utilise un modèle de Terre pour définir la lenteur  $u_i$  à la profondeur  $z_i$ . Ce modèle étant un modèle discret, on utilise une loi d'interpolation de la vitesse en fonction de la profondeur. Les intégrales (3.35) et (3.36) (et les intégrales équivalentes en géométrie sphérique) ont des solutions analytiques pour certaines lois de vitesse. À partir de cette loi de vitesse, on pourra également déterminer pour un paramètre de rai donné la profondeur du point bas, et inversement le paramètre de rai maximal qui atteint une profondeur donnée. Pour obtenir le temps d'intercept total et la distance épacentrale de l'onde, il suffit alors de sommer les contributions  $X_{ij}(p_j)$  et  $\tau_{ij}(p_j)$  sur l'ensemble des couches traversées par un rai  $p_j$ .

La figure 3.1 représente les tables  $X(p)$  et  $\tau(p)$  pour une source en surface. Chaque phase sismique est caractérisée par une gamme de paramètres de rai. Sur cette gamme,  $X(p)$  et  $\tau(p)$  sont monotones. Donc, si on connaît  $p$ , on peut en déduire la distance épacentrale et le temps de propagation. De même, si on connaît la distance épacentrale, on doit pouvoir en déduire le paramètre de rai de la phase désirée. Pour cela, on effectue une interpolation de la branche concernée. L'interpolation doit être réalisée de façon à ce que la dérivée première de  $\tau$  par rapport à  $p$  (donnant accès à  $X(p)$ ) et la dérivée seconde de  $\tau$  par rapport à  $p$  (utilisée pour le calcul de l'expansion géométrique) ne divergent pas et que l'on puisse déterminer facilement les pôles de la dérivée première. Buland et Chapman (1983) ont proposé un spline de la forme :

$$\tau_{ij} = a_i + b_i(p_{max} - p_j) + c_i(p_{max} - p_j)^2 + d_i(p_{max} - p_j)^{3/2} \quad (3.42)$$

$$X_{ij} = b_i + 2c_i(p_{max} - p_j) + \frac{3}{2}d_i(p_{max} - p_j)^{1/2} \quad (3.43)$$

avec  $p_{max}$  correspondant à l'extrémité supérieure de la branche. Connaissant  $X(p)$ , on peut alors en déduire à partir de (3.43) la valeur de  $p$  correspondante. On calcule ensuite la valeur de  $\tau(p)$  et enfin, on en déduit le temps de propagation. L'interpolation des branches permet également de calculer l'expansion géométrique :

$$\mathcal{R} = \frac{r_S r_R}{\alpha_S} \sqrt{\sin \Delta_{SR} \cos i_S \cos i_R \left| \frac{\partial X(p)}{\partial p} \right|_{p_{SR}} \frac{1}{p_{SR}}} \quad (3.44)$$

avec  $r_S$  et  $r_R$  le rayon de la source et du récepteur respectivement,  $\alpha_S$  la vitesse des ondes P à la source,  $i_S$  et  $i_R$  l'angle d'incidence à la source et au récepteur, respectivement. L'expansion géométrique est calculée pour la valeur de  $p$  correspondant au rai qui se propage entre la source et le récepteur. Sachant que  $\partial X(p)/\partial p = \partial^2 \tau(p)/\partial p^2$ , ce terme peut être calculé à partir des coefficients des splines (3.42) ou (3.43). De même, les angles d'incidence à la source et au récepteur sont calculés à partir de la valeur de  $p$  associée



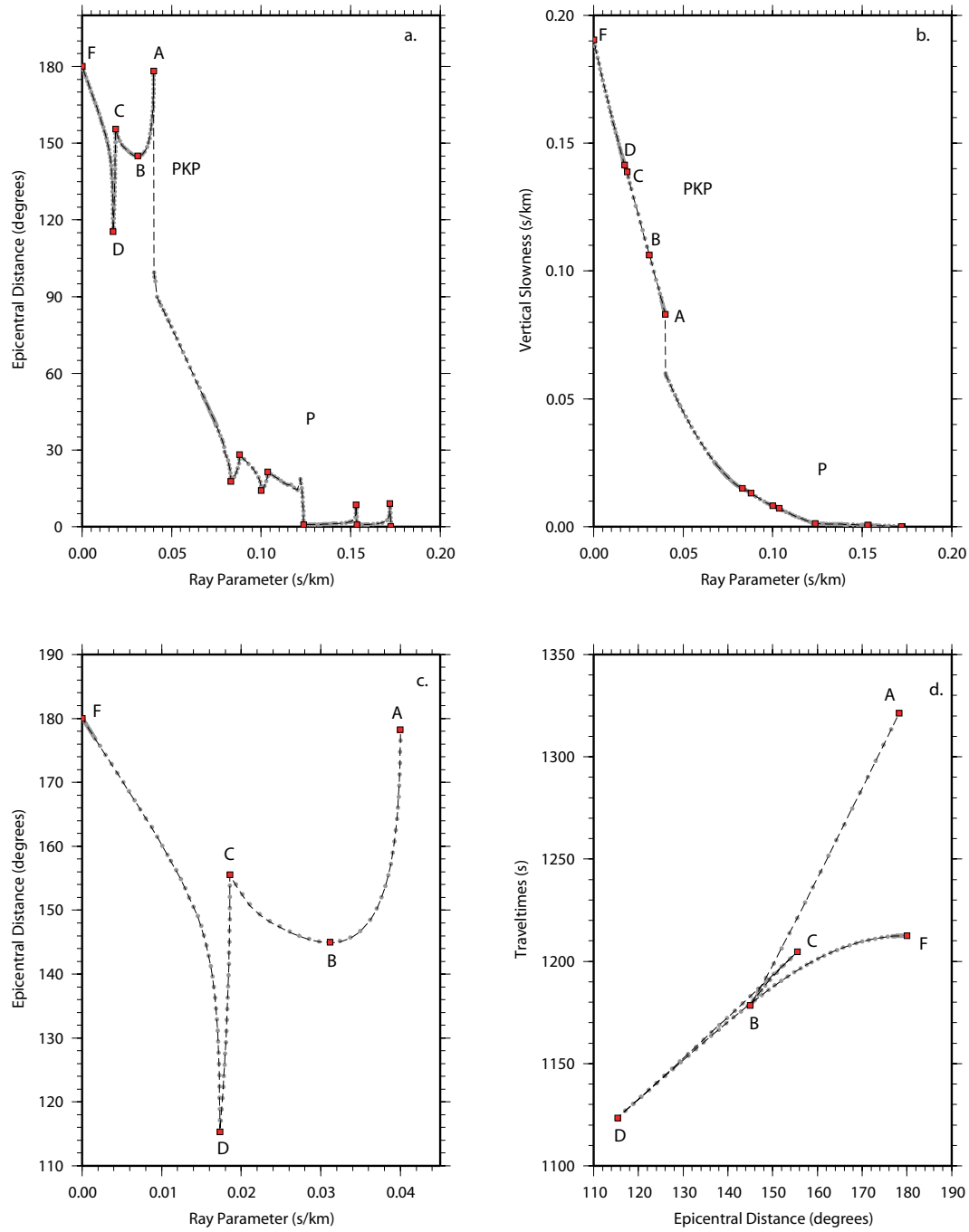


FIG. 3.1 – Tables pour les ondes de volumes P, calculées dans le modèle ak135 (Kennett et al., 1995) et pour une source en surface : (a)  $X(p)$ , (b)  $\tau(p)$ , (c)  $X(p)$  pour les ondes PKP, (d)  $T(p)$  pour les ondes PKP. Les points rouges correspondent aux extrémités de branches. On a calculé les tables pour les phases réfractées et les phases totalement réfléchies à une discontinuité.

à la distance épacentrale  $\Delta$ . Les variations de l'amplitude des ondes, ou de l'expansion géométrique, en fonction de la distance épacentrale sont fortement dépendantes du schéma d'interpolation des tables  $X(p)$  et  $\tau(p)$ , mais aussi de la loi d'interpolation du modèle de vitesse.

### 3.3.2 Interpolation du modèle de vitesse

Le calcul des noyaux de sensibilité nécessite le calcul de l'expansion géométrique pour l'onde de référence et l'onde diffusée au point diffractant. Ces calculs dépendent fortement du choix de la loi d'interpolation du modèle de vitesse. On dispose de différents schémas d'interpolation des profils de vitesse en profondeur pour lesquels il existe des solutions analytiques des intégrales (3.35) et (3.36) (Buland et Chapman, 1983). Cependant, un certain nombre de ces lois d'interpolation, telle que la loi de Bullen, ne garantissent pas la continuité des dérivées première et seconde et introduisent des oscillations indésirables dans les variations de l'amplitude de l'onde en fonction de la distance épacentrale (Cervený et Pretlová, 1977; Cervený et Janský, 1983).

Dans un milieu à symétrie sphérique, on peut choisir une approximation de la forme

$$\ln(r) = a_i + b_i \left(\frac{r}{v}\right)^2 + c_i \left(\frac{r}{v}\right)^4 + d_i \left(\frac{r}{v}\right)^6 \quad (3.45)$$

avec  $r$  le rayon,  $v$  la vitesse de l'onde en  $r$ . Les coefficients  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  et  $d_i$  pour chaque couche  $i$  peuvent être calculés entre chaque discontinuité majeure en utilisant un algorithme de spline cubique. Cette approximation garantit la continuité des dérivées première et seconde de la vitesse ce qui stabilise le calcul de l'amplitude de l'onde. Elle permet également d'avoir une solution analytique pour les intégrales (3.35) et (3.36). Cependant, à cause de la dépendance en  $\ln(r)$ , cette approximation doit être modifiée pour interpoler le modèle de vitesse dans la graine (Buland et Chapman, 1983) :

$$\ln(v) = \tilde{a}_i + \tilde{b}_i \left(\frac{r}{v}\right)^2 + \tilde{c}_i \left(\frac{r}{v}\right)^4 + \tilde{d}_i \left(\frac{r}{v}\right)^6 \quad (3.46)$$

L'interpolation du modèle de vitesse n'est pas critique pour le calcul du temps de propagation contrairement à  $dX/dp$  et donc à l'expansion géométrique. La figure 3.2 illustre l'effet de l'interpolation du modèle sur le calcul de  $\mathcal{R}$  pour les différentes phases du noyau. Les phases sont plus ou moins sensibles à l'interpolation du profil de vitesse. Généralement les courbes amplitude-distance sont plus stables avec l'utilisation du spline cubique. Les oscillations sont visiblement beaucoup plus faibles pour les ondes PKP(BC) et PKP(DF) et sont éliminées pour les phases PKP(AB) et PKP(CD) lorsqu'on utilise le spline (3.45)

et (3.46). Certaines oscillations, comme celle observée autour de  $150^\circ$  de distance épicentrale pour la phase PKP(DF), résultent d'un changement de courbure dans le profil de vitesse de ak135 (à une profondeur de 5370 km pour  $150^\circ$ ).

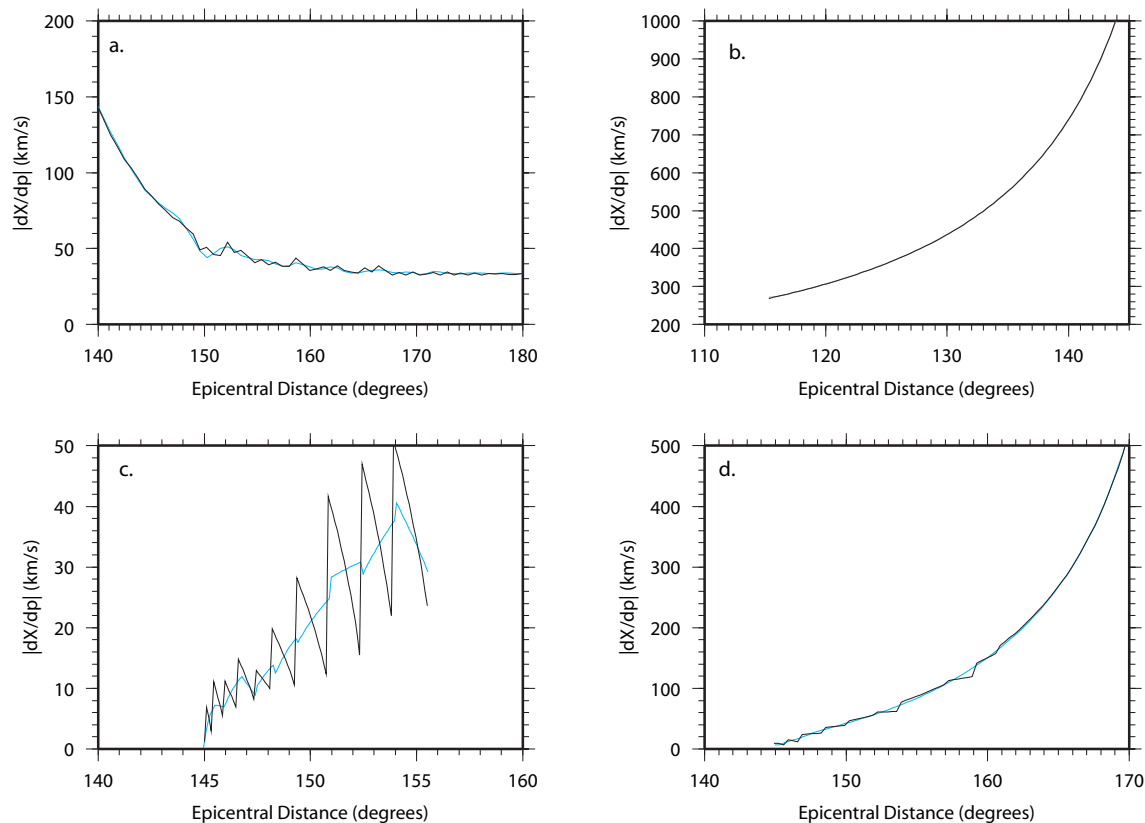


FIG. 3.2 – Variations de  $|dX/dp|$  en fonction de la distance épicentrale : (a) PKP(DF), (b) PKP(CD), (c) PKP(BC), (d) PKP(AB). Deux types d'interpolation du modèle de vitesse ont été utilisés : une loi linéaire de variation de la lenteur en fonction du rayon (noir) et le spline cubique (3.45) et (3.46) (bleu).

L'interpolation du modèle de vitesse n'explique pas toutes les oscillations. En effet, le schéma d'interpolation des branches  $X(p)$  et  $\tau(p)$  peut avoir aussi un effet sur le calcul de l'expansion géométrique. Si les extrémités des branches  $p_{max}$ , intervenant dans l'expression des splines (3.42) et (3.43), ne sont pas correctement déterminées, comme par exemple le point B dont la position dans le plan  $(\Delta, p)$  varie avec la profondeur de la source et du point diffractant (voir chapitre 5), des oscillations peuvent apparaître dans les variations de l'amplitude de l'onde en fonction de la distance épicentrale. Pour réduire cet effet, nous avons finalement interpolé des tables donnant l'expansion géométrique en fonction de la distance, en utilisant le spline cubique (3.45) et (3.46) au sens des moindres

carrés (De Boor, 1978). La figure 3.3 illustre l'utilisation de ce type de spline pour le calcul de l'expansion géométrique de la phase PKP(DF) (a) et de la phase PKP(BC) (b).

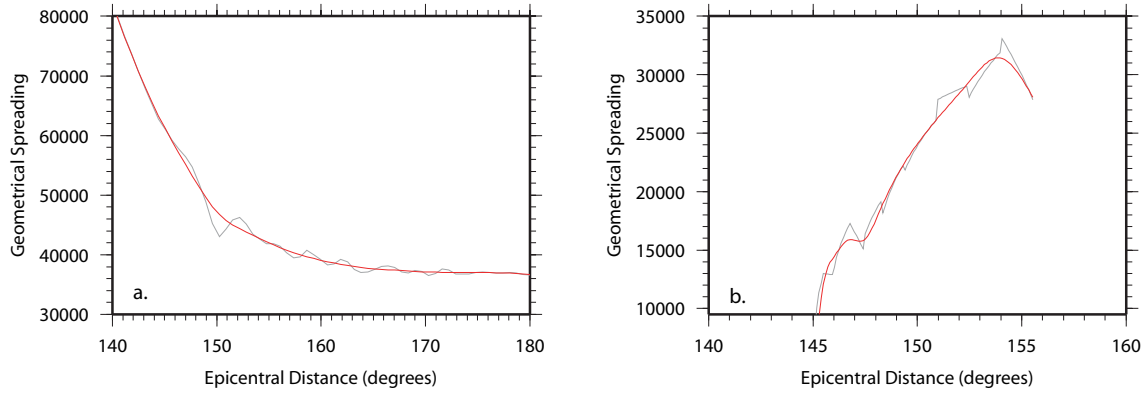


FIG. 3.3 – Variation de l'expansion géométrique en fonction de la distance épacentrale : (a) PKP(DF), (b) PKP(BC), pour une interpolation du modèle de vitesse du type (3.45) ou (3.46) (noir) et pour une interpolation du modèle de vitesse avec le spline cubique au sens des moindres carrés (rouge).

### 3.3.3 Principe du calcul des noyaux de sensibilité

Nous détaillerons dans cette section les étapes principales du calcul. La géométrie du problème est fixée : on connaît les coordonnées de la source et du récepteur, et on considère toutes les positions possibles du point diffractant (figure 3.4). On utilise l'interpolation des tables pour calculer  $T$ ,  $T'$ ,  $T''$ ,  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{R}'$ ,  $\mathcal{R}''$ . Il s'agit de sélectionner au préalable la branche correspondant à la phase souhaitée, c'est-à-dire la gamme de paramètres de rai correspondante.

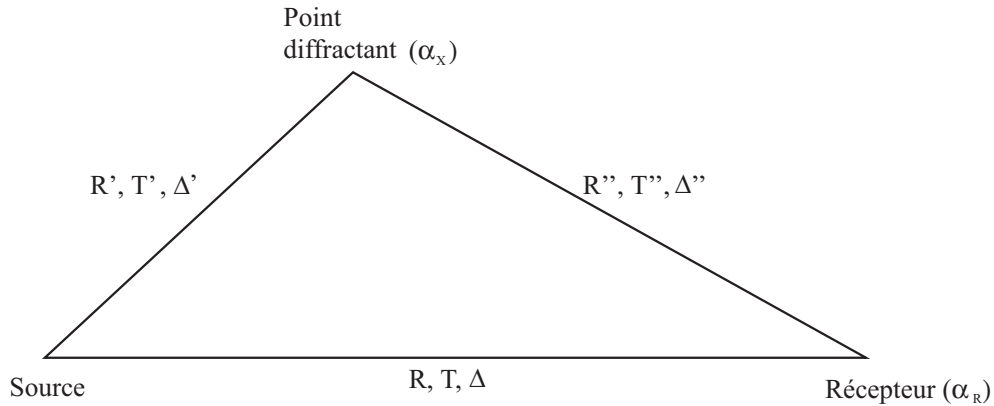


FIG. 3.4 – Configuration géométrique du problème de diffusion

## Rai de référence

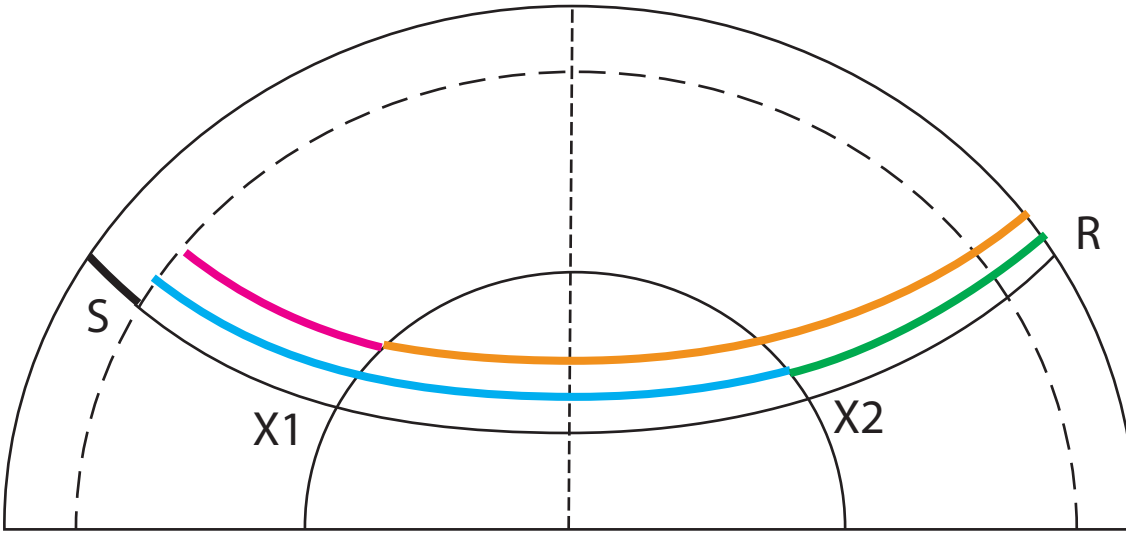
- Détermination de  $p_S$  correspondant au paramètre de rai limite pour la profondeur de la source.
- Corrections des tables  $X(p)$  et  $\tau(p)$  pour la profondeur de la source (pour  $p < p_S$ , c'est-à-dire pour les rais qui se propagent à une plus grande profondeur que celle de la source)
- Interpolation de la branche correspondant à la phase considérée
- Détermination du paramètre de rai  $p_{SR}$  correspondant à la distance épacentrale entre la source et le récepteur.
- Calcul de  $\tau(p_S)$ , de  $dX/dp(p_S)$

On peut alors en déduire le temps de propagation  $T$ , l'expansion géométrique  $\mathcal{R}$  et le coefficient  $\Pi$ .

## Rais diffractés

### *Pour chaque profondeur du point diffractant*

- Détermination de  $p_{lim}$  correspondant au paramètre de rai limite pour la profondeur du point diffractant.
- Corrections des tables pour la profondeur du point diffractant (pour  $p < p_{lim}$ )
- Elaboration des tables  $X_1(p)$ ,  $X_2(p)$ ,  $\tau_1(p)$ ,  $\tau_2(p)$  pour chacune des branches entre la source et le point diffractant (S-X) et entre le point diffractant et le récepteur (X-R). En effet, en géométrie sphérique, une isoprofondeur correspond à une sphère. Ainsi, un rai de paramètre  $p$  est susceptible d'atteindre cette profondeur en deux points distincts. Il faut donc construire deux tables associées à chacune de ces positions (figure 3.5). Ensuite, en fonction du point diffractant, il faudra choisir les tables  $X_1(p)$ ,  $\tau_1(p)$  ou  $X_2(p)$ ,  $\tau_2(p)$ .
- Interpolation des tables pour  $p < p_{lim}$



Position du point diffractant X1

— branche SX

— branche XR

Position du point diffractant X2

— branche SX

— branche XR

— correction de la profondeur de la source

FIG. 3.5 – Principe de la construction des tables en fonction de la profondeur du point diffractant. Pour une profondeur donnée du point diffractant, il existe deux positions possibles  $X_1$  et  $X_2$ . Pour chacune de ces positions, on construit les tables pour la branche S-X et la branche X-R.

*Pour chaque position du point diffractant à une profondeur donnée*

- Détermination des paramètres de rai incident et diffracté pour les distances épacentrales  $\Delta'$  et  $\Delta''$ .
- Calcul de  $T'$ ,  $T''$ ,  $\mathcal{R}'$ ,  $\mathcal{R}''$ ,  $\Pi'$  et  $\Pi''$
- Calcul des coefficients de scattering
- Calcul de l'intégrale sur les fréquences
- Calcul de  $K_m$  au point diffractant considéré.

Le code a été optimisé de façon à ne tenir compte que des points diffractants situés dans le volume de Fresnel.

## 3.4 Exemples de noyaux de sensibilité

### 3.4.1 Principales caractéristiques des noyaux de sensibilité en temps de propagation

Dans ce paragraphe, nous illustrerons nos propos avec les noyaux  $K_\alpha$  pour une onde PKIKP dans la graine. Ces observations sont valables pour les noyaux en temps absolu des ondes de volume, et en l'absence de caustiques.

#### "Banana-doughnut" kernels

La figure 3.6 montre la configuration géométrique pour le calcul des noyaux de sensibilité dans la graine.

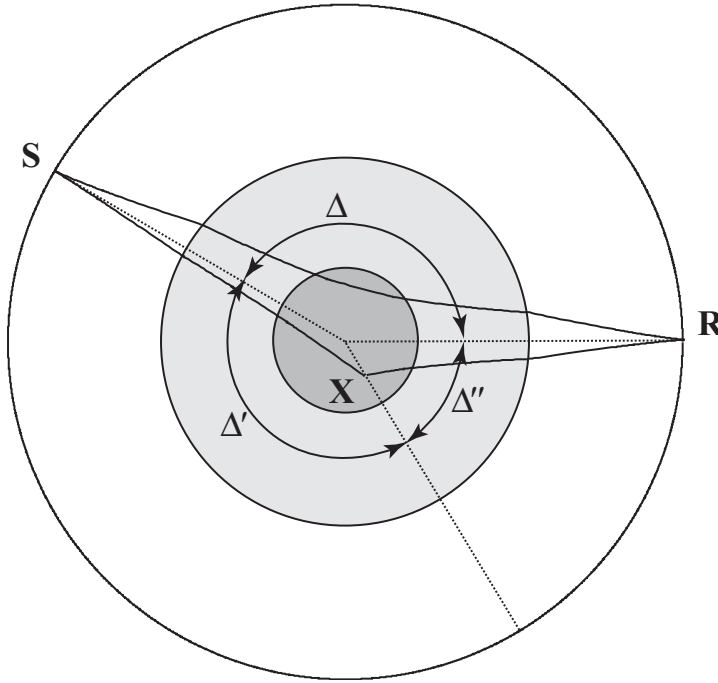


FIG. 3.6 – Configuration géométrique pour le calcul des noyaux de sensibilité des ondes PKIKP dans la graine

En toute rigueur, pour construire le noyau de sensibilité de la PKIKP, il faut examiner toutes les ondes susceptibles d'être diffusées dans la graine. Deux phases transmises se propagent dans la graine : les ondes PKIKP et les ondes PKJKP. Il existe également les phases qui se réfléchissent sur la face interne de l'ICB ( $\text{PKI}_m\text{KP}$ ). On peut négliger les ondes PKJKP qui ont une trajectoire S dans la graine. En effet, elles arrivent bien après

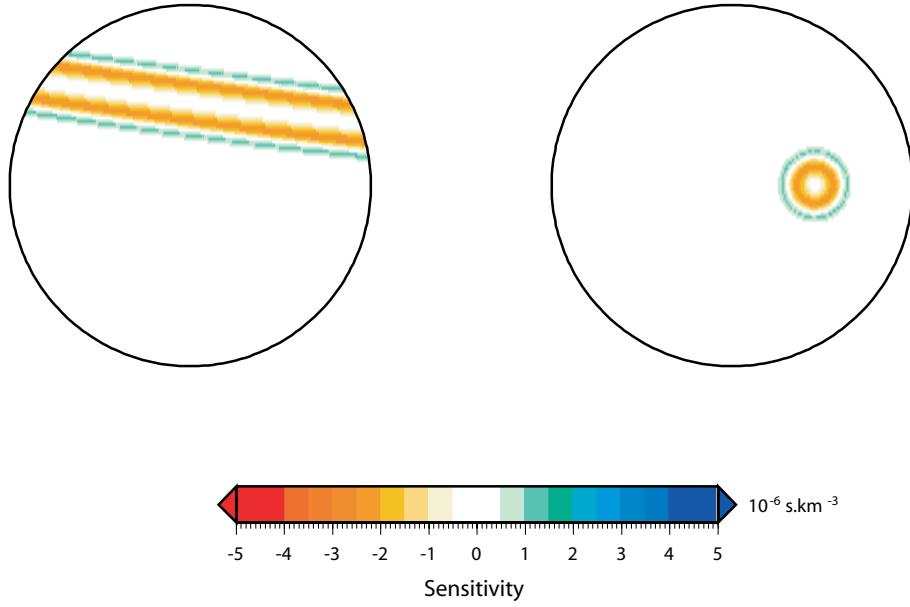


FIG. 3.7 – Noyaux de sensibilité  $K_\alpha$  dans la graine pour le temps de propagation d’une onde PKIKP de  $165^\circ$  de distance épacentrale et une période dominante de 2 s. Section dans le plan d’incidence (gauche) et dans un plan transverse passant par le point le plus bas du rai (droite).

les PKIKP et donc ne peuvent pas contribuer à la forme d’onde. De même, à des distances supérieures à  $150^\circ$ , on peut négliger les phases  $\text{PKI}_m\text{KP}$ . Par contre, à courte distance épacentrale, il aurait fallu tenir compte des ondes diffractées à l’ICB ( $\text{PKP}(\text{BC})_{\text{diff}}$ ) que l’on n’est pas capable de modéliser avec la théorie des rais, ainsi que des ondes  $\text{PKI}_m\text{KP}$ . On ne considèrera donc que les ondes PKIKP diffusées en onde PKIKP.

La figure 3.7 montre le noyau de sensibilité du temps de propagation d’une onde P pour une perturbation isotrope de la vitesse des ondes P dans la graine. Le volume du noyau de sensibilité est fini : les ondes diffusées qui arrivent trop tard pour être incluses dans la fenêtre de corrélation n’influencent pas la mesure du temps de propagation. On observe une alternance de zones négatives et positives correspondant aux zones de Fresnel successives. Dans la graine, l’amplitude maximale de la sensibilité à une perturbation de vitesse est de l’ordre de  $2 \cdot 10^{-6} \text{ s/km}^3$  (figure 3.8). Les zones blanches (sensibilité nulle) sont des zones où les variations de vitesses ne perturbent pas le temps de propagation de l’onde. Le rai n’est donc pas sensible aux perturbations de vitesse. Les zones en rouge ou orange correspondent à une sensibilité négative : une anomalie rapide ( $\delta\alpha > 0$ ) va accélérer l’onde ( $\delta T < 0$ ). Les zones en bleu ou vert correspondent à une sensibilité positive : une anomalie rapide placée dans cette zone va ralentir l’onde ( $\delta T > 0$ ). Ainsi,



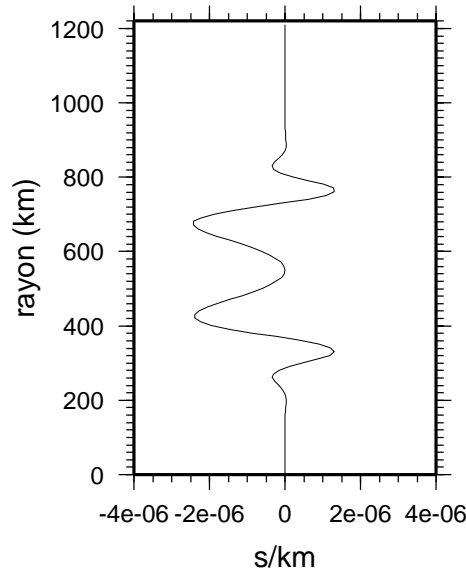


FIG. 3.8 – Profil de sensibilité dans le plan d'incidence au niveau du point-bas du rai pour une onde PKIKP de  $165^\circ$  de distance épacentrale et une période dominante de 2 s.

le noyau ressemble à une "banane" dans le plan du grand cercle, et à un beignet dans un plan perpendiculaire au rai.

Pourquoi la sensibilité est-elle nulle sur le rai ? On mesure les temps d'arrivée des ondes par cross-corrélation entre l'onde observée et l'onde de référence. L'onde diffractée par une hétérogénéité de vitesse va décaler le maximum de corrélation en fonction de son signe. Les anomalies de vitesse situées sur le rai vont affecter l'amplitude de l'onde mais pas sa phase. En effet, si le point diffractant est sur le rai alors  $T'' + T' = T$ . Ainsi, la mesure de cross-corrélation ne "voit" pas au premier ordre les anomalies sur le rai de référence. Cependant, les anomalies de tailles supérieures à la largeur du "trou" affecteront le temps de propagation de l'onde.

Cependant, dans le cas des ondes PKP(DF),  $\delta \mathbf{u}$  conserve la forme d'onde de  $\mathbf{u}$  : il n'y a pas de déphasage associé au passage à travers une caustique. Par contre, si une onde passe à travers une caustique, alors elle acquiert un déphasage de  $\pi/2$ . Ainsi en fonction de la valeur de  $M'' + M' - M$ , la sensibilité peut être non nulle sur le rai. C'est le cas par exemple des noyaux de sensibilité en temps de propagation des ondes PP (Hung et al., 2000) : en raison de la présence de la caustique la sensibilité est maximale sur le rai au voisinage du point de rebond. Il en sera de même pour les ondes PKP(AB) dans le noyau. Les noyaux de sensibilité des ondes de surface présentent également une sensibilité non nulle sur le rai de référence (Yoshizawa et Kennett, 2005). Les caractéristiques des noyaux de sensibilité sont fonction de l'observable sismique considéré. Ainsi, le noyau de

sensibilité pour l'amplitude présente une sensibilité maximale sur le rai (Dahlen et Baig, 2002) (voir annexe C).

### Influence de la distance épicentrale et de la période dominante

Pour une distance épicentrale donnée, quand la fréquence dominante du signal augmente, la forme des noyaux ne change pas mais la taille de la zone de Fresnel augmente (Hung et al., 2000; Favier et Chevrot, 2003). Cet effet est illustré par la figure 3.9.

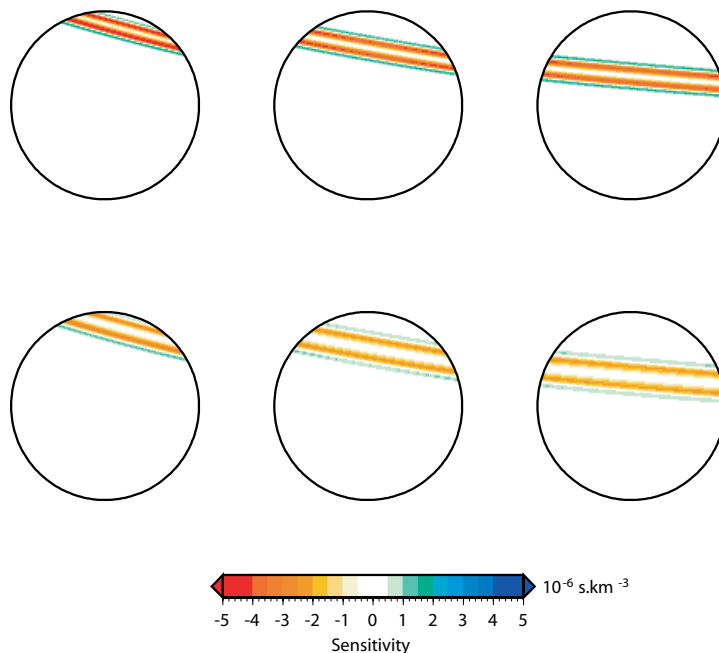


FIG. 3.9 – Variation de la taille de la Zone de Fresnel en fonction de la distance épicentrale et de la période dominante. Nous avons représenté les noyaux  $K_\gamma$  des ondes PKIKP dans la graine, pour des distances épicentrales de 150° (colonne 1), 160° (colonne 2) et 170° (colonne 3). Les figures ont été obtenues pour une période dominante de 1 s (haut) et pour une période dominante de 2 s (bas).

En effet, le volume de Fresnel augmente avec la période dominante de l'onde. Si l'on considère le cas des ondes PKIKP dans la graine, pour une fonction source du type dérivée seconde de gaussienne, avec une période dominante de 2 s et pour une distance épicentrale de 170°, le diamètre de la seconde zone de Fresnel est de 540 km (Table 3.4.1). À la même distance épicentrale, mais pour une période de 1 s, ce diamètre passe à 390 km. De la même façon, pour une période dominante donnée, le diamètre du volume de Fresnel augmente avec la distance épicentrale. Ainsi, pour une distance épicentrale de 180° et 2 s de période

dominante, le volume de Fresnel d'une onde PKIKP occupe approximativement 30% du volume de la graine.

Distance Epicentrale	Période Dominante	Taille de la zone de Fresnel
150°	1 s	295 km
150°	2 s	415 km
160°	1 s	365 km
160°	2 s	510 km
170°	1 s	390 km
170°	2 s	540 km

TAB. 3.1 – Variation de la taille de la zone de Fresnel en fonction de la distance épacentrale et de la période dominante de l'onde

Il faut donc connaître de façon précise le contenu fréquentiel de l'onde qui dépend à la fois de la fonction source, de l'atténuation et du type de données utilisées (large bande ou courte période).

### Effets de l'interpolation du modèle de vitesse

Compte tenu de la définition des noyaux de sensibilité, leur amplitude et la perturbation du temps de propagation sont fortement dépendantes du schéma d'interpolation du modèle de vitesse, via le calcul des expansions géométriques. Si on néglige la contribution de la densité et de la vitesse de phase des ondes S au temps de propagation des ondes P, alors en intégrant  $K_\alpha$  sur le volume de la graine, on obtient le temps de propagation dans la graine pour le paramètre de rai donné. La figure 3.10 représente le temps de propagation d'une onde P dans la graine en fonction de la distance épacentrale, obtenu dans le cadre de la théorie des rais (pointillés) et en intégrant le noyau  $K_\alpha$  pour deux schémas d'interpolation du modèle de vitesse. En fonction de la loi d'interpolation du modèle de vitesse, le temps de propagation calculé à partir de la théorie des rais présente quelques oscillations par rapport à celui de la théorie des rais. À grande distance épacentrale, on constate que la courbe obtenue avec les noyaux de sensibilité présente de fortes oscillations par rapport à la courbe de référence obtenue avec la théorie des rais. Cependant, ces oscillations sont beaucoup plus importantes si on utilise une loi lineaire pour la lenteur du type  $u = Ar + B$  (rouge) que si on utilise le spline cubique (3.46). A courte distance épacentrale ( $\Delta < 140^\circ$ ), le calcul des noyaux de sensibilité ne prend pas en compte les ondes diffractées à l'ICB.

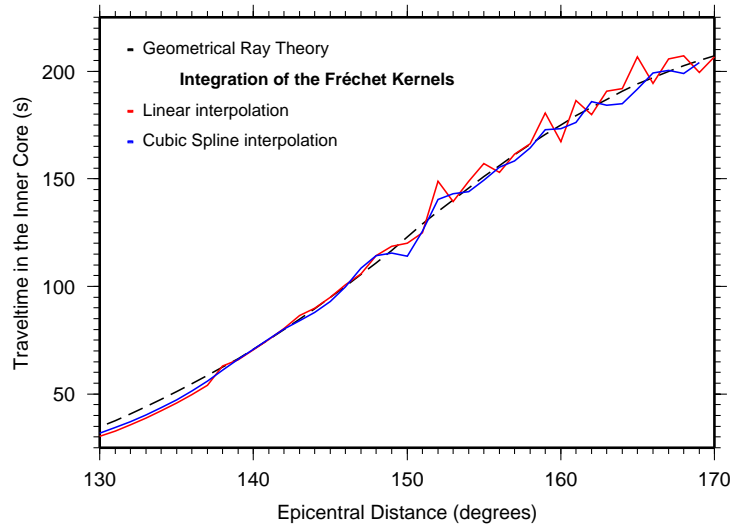


FIG. 3.10 – Temps de propagation des ondes PKP(DF) dans la graine dans le cadre de la théorie des rais (pointillés) et par intégration du noyaux  $K_\alpha$  sur le volume de la graine. On compare deux loi d'interpolation du modèle de vitesse : une loi linéaire de la lenteur  $u = Ar + B$  en rouge, et le spline cubique (3.46) en bleu.

Les noyaux ne sont donc pas complets et on observe une différence significative entre la théorie des rais et celle des noyaux de sensibilité.

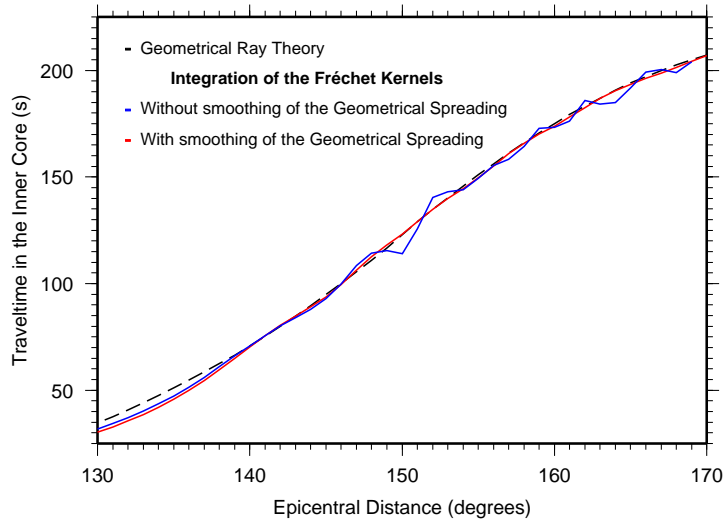


FIG. 3.11 – Temps de propagation des ondes PKP(DF) dans la graine dans le cadre de la théorie des rais (pointillés) et par intégration du noyaux  $K_\alpha$  sur le volume de la graine : avec l'interpolation du modèle de vitesse avec le spline cubique (3.46) (bleu) et après l'interpolation des tables  $\mathcal{R}(\Delta)$  avec un spline cubique au sens des moindres carrés (De Boor, 1978).

La figure 3.11 représente le temps de propagation dans la graine pour la loi de vitesse (3.46) (bleu), et après interpolation des tables  $\mathcal{R}(\Delta)$  avec un spline cubique au sens des moindres carrés (rouge). L'amplitude des noyaux de sensibilité est donc fortement dépendante des schémas d'interpolation utilisés pour calculer l'expansion géométrique. Cet exercice nous a également permis de vérifier le calcul des noyaux de sensibilité puisque en intégrant sur tout le volume de la graine, on retrouve le temps de propagation de l'onde calculé dans le cadre de la théorie des rais.

### 3.4.2 Noyaux de sensibilité des ondes PKIKP en milieu anisotrope

La graine est un milieu anisotrope : en moyenne, les ondes PKP(DF) se propagent plus vite dans la direction de l'axe de rotation que dans le plan de l'équateur.

Afin de calculer les noyaux de sensibilité des ondes PKP(DF) dans une graine anisotrope, on considère un modèle de graine avec une anisotropie transverse isotrope et un axe de symétrie parallèle à l'axe de rotation de la Terre. Nous avons montré au chapitre 2 que, pour une orientation donnée de l'axe de symétrie, la propagation des ondes P dans un tel milieu est décrite par deux paramètres isotropes  $\alpha$  et  $\beta$  et par trois paramètres anisotropes  $\epsilon$ ,  $\delta$  et  $\gamma$ . Il faut donc cinq noyaux de sensibilité pour exprimer la perturbation du temps de propagation d'une onde P par rapport à un milieu de référence isotrope.

$$\delta T = \int_V \left( \frac{\delta\alpha}{\alpha} K_\alpha + \frac{\delta\beta}{\beta} K_\beta + \epsilon K_\epsilon + \delta K_\delta + \gamma K_\gamma \right) dV \quad (3.47)$$

Généralement on peut négliger la perturbation isotrope d'onde S. En effet, une onde S diffusée en onde S est beaucoup plus lente que l'onde P et ne peut contribuer de façon constructive à la forme d'onde. De même, les phases converties sont beaucoup plus lentes et il n'y a pas de diffusion dans la direction incidente (voir annexe B). Les noyaux de sensibilité  $K_\epsilon$ ,  $K_\delta$  et  $K_\gamma$  d'une PKP(DF) dans la graine pour trois directions de propagation par rapport à l'axe de rotation de la Terre sont représentés sur la figure 3.12. On a considéré une source avec un spectre du type dérivée seconde d'une gaussienne, et la source et le récepteur sont en surface. Ces noyaux ont une forme similaire à ceux obtenus pour des perturbations isotropes. Il n'y a pas de sensibilité le long du rai géométrique de référence et la seconde zone de Fresnel a un signe opposé à la première zone de Fresnel. Dans les deux premières zones de Fresnel, les angles de diffusion sont petits. En effet, dans la graine les points diffractants sont loin de la source et du récepteur et ainsi les ondes diffusées ont

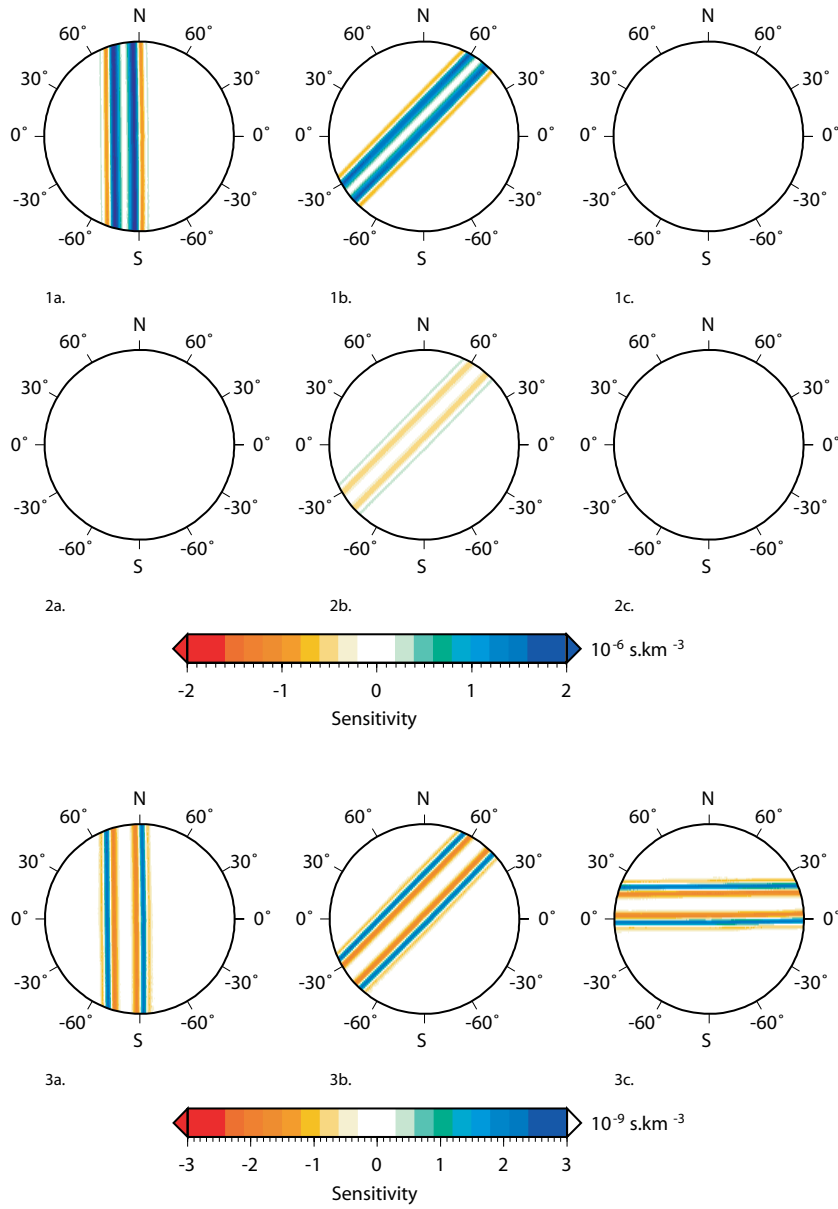


FIG. 3.12 – Sections le long d'un plan méridien dans la graine des noyaux de sensibilité anisotropes  $K_\epsilon$  (1),  $K_\delta$  (2) et  $K_\gamma$  (3) pour une distance épacentrale de  $175^\circ$  et une période dominante de 2 s. L'axe de symétrie est parallèle à l'axe de rotation de la graine. L'amplitude et le signe des noyaux de sensibilité dépendent de l'orientation du rai de référence par rapport à l'axe de symétrie : (a) rai polaire se propageant parallèlement à l'axe de rotation de la Terre, (b) rai se propageant à  $45^\circ$  de l'axe de rotation de la Terre et (c) rai se propageant parallèlement au plan de l'équateur. Noter que l'échelle pour  $K_\gamma$  a été multipliée par 1000 par rapport à  $K_\delta$  et  $K_\epsilon$ .

une trajectoire très proche de celle de l'onde de référence. On se souvient que les coefficients de Rayleigh et donc les noyaux de sensibilité dépendent essentiellement de l'angle entre les vecteurs d'ondes  $\hat{\mathbf{k}}'$  et  $\hat{\mathbf{k}}''$  et l'axe de symétrie  $\hat{\mathbf{s}}$ . Donc, dans le volume de Fresnel, on a  $\hat{\mathbf{k}}'' \simeq \hat{\mathbf{k}}' \simeq \hat{\mathbf{k}}$  avec  $\hat{\mathbf{k}}$  le vecteur d'onde de l'onde de référence. Ainsi l'amplitude et le signe des noyaux de sensibilité sont essentiellement contrôlés par l'orientation générale de l'onde par rapport à l'axe de symétrie. D'autre part, on observe que l'amplitude de  $K_\gamma$  est petite devant celles de  $K_\epsilon$  et  $K_\delta$ . En effet, si dans la graine on se trouve pratiquement dans la condition de forward scattering alors l'amplitude de  $\Omega_\gamma$  est négligeable et par conséquent celle de  $K_\gamma$  également. En pratique, on négligera les contributions en  $\gamma$ . On observe également que  $K_\epsilon$  a un signe opposé à celui de  $K_\delta$ . En effet,  $\Omega_\epsilon$  a toujours une amplitude négative quelle que soit la direction de propagation par rapport à l'axe de symétrie tandis que  $\Omega_\delta$  est toujours positif. Ainsi, si on admet que l'amplitude des noyaux est contrôlée par le "forward scattering" et si on néglige la contribution isotrope en  $\delta\alpha/\alpha$ , on peut voir que la perturbation de temps de propagation des trajets polaires (i.e. parallèles à  $\hat{\mathbf{s}}$ ) est  $\delta T/T_0 \approx \epsilon$ , tandis que pour les trajets équatoriaux (i.e. perpendiculaires à  $\hat{\mathbf{s}}$ ) cette perturbation devient  $\delta T/T_0 \approx 0$  ( $T_0$  est le temps de propagation de l'onde référence dans le milieu de référence). Si l'axe de symétrie est rapide, alors  $C_{33} > C_{11}$  et  $\epsilon$  est négatif : un rai polaire est en moyenne plus rapide qu'un rai équatorial. La contribution de  $\delta$  à la perturbation du temps de propagation est maximale ( $\delta T/T_0 \approx (3\epsilon - \delta)/4$ ) quand l'onde se propage à  $45^\circ$  de  $\hat{\mathbf{s}}$ , le signe de la perturbation dépendant de la valeur de  $\epsilon/\delta$ .

### 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons utilisé les développements théoriques de Dahlen et al. (2000) pour calculer les noyaux de sensibilité isotropes et anisotropes des ondes PKIKP. Les noyaux de sensibilité anisotropes sont calculés pour une direction donnée de l'axe de symétrie et présentent des caractéristiques similaires aux noyaux isotropes : sensibilité nulle le long du rai, alternance des zones de Fresnel de sensibilité soit positive soit négative. Compte tenu du volume de Fresnel de ces ondes, on peut s'interroger sur l'apport des noyaux de sensibilité à l'étude de la structure anisotrope de la graine.

Jusqu'à présent, les noyaux de sensibilité ont été utilisés pour des tomographies isotropes haute résolution (Montelli et al., 2004a; Hung et al., 2004) ainsi que pour des tomographies anisotropes locales du manteau (Favier, 2004). Montelli et al. (2004b) ont montré que, en fonction de la profondeur et de la taille des anomalies, l'amplitude des perturbations de vitesse est 30-50% plus forte pour les inversions à fréquence finie (pour

des ondes P de 20 s de période dominante en moyenne) que pour les inversions utilisant la théorie des rais. Cette étude a permis d’imager des structures thermiques telles que des plumes mantelliques pouvaient s’enraciner dans le manteau inférieur. Cela semble montrer l’importance de l’utilisation des noyaux de sensibilité lorsqu’on utilise des ondes de grande longueur d’onde.

Malgré un contenu fréquentiel plutôt haute fréquence, on a pu constater que des ondes PKP(DF) échantillonnent un volume important de la graine. La largeur du volume de Fresnel d’une onde de 2 s de période dominante est pratiquement identique au diamètre de la sous-graine proposée par Ishii et Dziewonski (2003). Lors d’une inversion de la structure radiale de la graine avec la théorie des rais, on considère généralement que l’essentiel de la perturbation du temps de propagation est généré par des anomalies situées au niveau du point le plus bas du rai. La structure des noyaux 3-D montre que l’onde serait plutôt sensible aux structures au voisinage du rai. On peut donc s’interroger sur le résultat d’une inversion radiale d’une graine anisotrope quand on prend en compte les effets de fréquence finie. Dans le chapitre suivant, nous nous proposons d’utiliser les noyaux de sensibilité des ondes PKP(DF) pour étudier la structure anisotrope de la graine.





## Chapitre 4

# Etude de la structure anisotrope de la graine

L'anisotropie de la graine fait l'objet de nombreuses études utilisant différentes approches sur différents types de données. La perturbation du temps de propagation absolu et différentiel des ondes de volume et les modes normaux ont montré que la graine est anisotrope avec un axe de symétrie rapide parallèle à l'axe de rotation de la Terre. Cependant, la structure fine de l'anisotropie en profondeur est encore un sujet de débat. Par exemple, à partir d'une analyse des modes normaux et des temps de propagation, Tromp (1995) propose une augmentation de l'anisotropie au centre de la graine. A partir des temps de propagation, Su et Dziewonski (1995) ont également trouvé une forte augmentation de l'anisotropie, supérieure à 3%, pour un rayon inférieur à 300 km. Au contraire, McSweeney et al. (1997) ont détecté une augmentation de l'anisotropie entre 200 et 500 km sous l'ICB avec un taux d'anisotropie autour de 4%, et une décroissance de l'anisotropie à plus grande profondeur. Par ailleurs, Ouzounis et Creager (2001) et Song et Xu (2002) proposent une anisotropie forte, entre 5% et 8%, sous une couche isotrope dans l'hémisphère Ouest. À partir de l'inversion simultanée des modes normaux et des temps absolus et différentiels des PKP, Ishii et al. (2002b) ont obtenu un modèle de graine avec une anisotropie de 2% sous l'ICB et entre 0% et 1% en son centre. Dans toutes ces études, il a été supposé que l'axe de symétrie est parallèle à l'axe de rotation de la Terre, ou légèrement incliné.

En utilisant la perturbation du temps de propagation des ondes PKP(DF), Ishii et Dziewonski (2002) ont détecté un changement du comportement anisotrope de la graine dans sa partie centrale ( $r < 300\text{km}$ ), avec une direction lente de propagation à environ  $45^\circ$  de l'axe de rotation de la graine. Ils proposent ainsi l'existence d'une sous-graine

avec un rayon d'environ 300 km. Ces mêmes données ont été ensuite réinterprétées en supposant l'existence d'un axe rapide de symétrie dans toute la graine avec une très forte augmentation de l'anisotropie (Ishii et Dziewonski, 2003). L'analyse des modes propres par Beghein et Trampert (2003) a également montré un changement d'anisotropie dans la partie centrale ( $r < 400-450\text{km}$ ), avec un axe lent parallèle à l'axe de rotation de la Terre. Les données prédites à partir de ce modèle sont compatibles avec les perturbations du temps de propagation des ondes de volume. Un résultat similaire, mais avec une amplitude différente, avait été obtenu par Romanowicz et Bréger (2000) à partir de l'inversion d'un important jeu de données de modes propres.

La plupart des modèles de graine, dérivés à partir des temps de propagation, ont été obtenus dans le cadre de l'approximation géométrique des rais. On fait donc généralement l'hypothèse simplificatrice que la perturbation du temps de propagation est essentiellement associées aux structures situées au voisinage du point bas du rai. Lorsque les ondes ont un contenu fréquentiel fini, cette hypothèse n'est plus valable et il faut considérer la structure 3-D du rai. Nous avons vu au chapitre précédent que les ondes PKP(DF), compte tenu de la longueur de leur trajet, ont une zone de Fresnel assez large dans la graine. À grande distance épacentrale, cette zone de Fresnel est de la même dimension que l'hypothétique sous-graine. L'analyse des ondes de volume est cruciale puisque la résolution des modes normaux est faible au centre de la graine. Si on prend en compte la zone de Fresnel des PKP(DF), on augmente également l'échantillonnage spatial de la graine, et donc on améliore la résolution en profondeur.

Il est primordial de bien connaître les propriétés d'anisotropie de la graine afin de contraindre les processus de sa formation, en relation avec l'accrétion et la différenciation de la Terre, et son comportement dynamique présent. On attribue généralement l'anisotropie de la graine à une orientation préférentielle de la phase hexagonale compacte du fer (fer  $\epsilon$ ) qui est stable à haute pression et haute température (Stixrude et Cohen, 1995; Ma et al., 2004). Mais d'autres phases du fer sont susceptibles d'être stables aux conditions thermodynamiques de la graine. Le changement d'anisotropie dans la graine, s'il est réel, pourrait indiquer l'existence d'une autre phase du fer au centre de la graine (Beghein et Trampert, 2003), un changement du mécanisme d'orientation des cristaux ou une différenciation chimique.

Dans ce chapitre, dédié à l'étude de l'anisotropie de la graine et plus particulièrement de son centre, nous examinerons dans un premier temps les écarts entre la théorie des rais et celle des noyaux de sensibilité avec l'étude d'un problème direct supposant l'existence d'une sous graine. Par ailleurs, on constate que le problème de la structure anisotrope ne

présente vraisemblablement pas une solution unique. On se propose alors d'inverser un jeu de données afin de tester l'apport éventuel des noyaux de sensibilité à une telle étude, la non-unicité de la solution avec l'introduction d'informations a priori et enfin l'existence d'une sous-graine. Je présenterai donc les données utilisées pour les inversions et leur traitement en rais résumés. Puis nous examinerons plus précisément la formulation du problème inverse. Enfin, nous commenterons les trois familles de modèles de graine que nous avons obtenues. Une grande partie des résultats exposés dans ce chapitre ont fait l'objet d'une publication (Calvet et al., 2006b).

## 4.1 Le problème direct : Théorie des noyaux de sensibilité versus Théorie géométrique des rais

L'étude du problème direct permet de dégager les effets de la théorie utilisée lors de l'inversion de la structure radiale d'un objet comme la graine. Nous utiliserons pour illustrer nos propos le modèle de Ishii et Dziewonski (2003).

### 4.1.1 Noyaux 1D

Si on cherche la structure radiale d'un objet comme la graine, on peut réduire l'intégrale sur le volume dans l'expression de la perturbation du temps de propagation à une intégrale sur le rayon  $r$  :

$$\delta T = \int_r \sum_{m_i} (\delta m_i / m_i) K_{m_i}^{1D} dr \quad (4.1)$$

Le noyau 1D  $K_{m_i}^{1D}$  du paramètre  $m_i$  est obtenu en intégrant le noyau 3D correspondant sur des sphères concentriques de rayon  $r$ .  $(\delta m_i / m_i) K_{m_i}^{1D}$  est la perturbation du temps de propagation dans une couche d'épaisseur  $dr$  située au rayon  $r$ . On peut donc construire de façon tout à fait similaire un noyau 1D géométrique en calculant le temps de propagation dans chaque couche pour un paramètre de rai donné et ainsi comparer les deux théories.

La figure 4.1 montre le noyau  $K_\alpha^{1-D}$  en fonction du rayon, pour différentes distances épacentrales et pour une onde PKIKP.

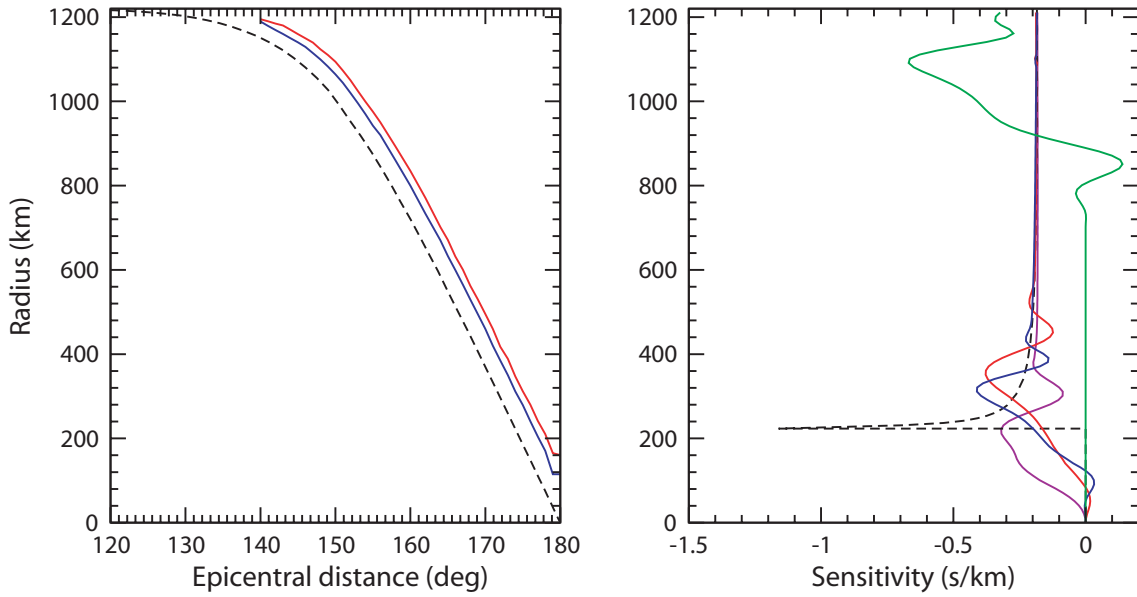


FIG. 4.1 – Noyaux 1D  $K_\alpha$  : comparaison entre la théorie des noyaux de Fréchet à fréquence finie et la théorie géométrique des rais. (a) Comparaison de la position du maximum de sensibilité entre les noyaux de Fréchet à 1 s de période dominante (bleu) et à 2 s de période dominante (rouge) et la position du point bas dans le cadre de la théorie des rais (noir). (b) Noyaux de sensibilité 1D pour une distance épicentrale de  $174^\circ$  pour une onde à 1 s de période dominante (bleu), 2 s de période dominante (rouge) et pour la théorie des rais (noir). On a également représenté le noyau à 2 s de période dominante pour une distance épicentrale de  $150^\circ$  (vert) et de  $178^\circ$  (violet).

On constate généralement que le noyau de Fréchet 1D est proche du noyau 1D calculé dans le cadre de la théorie géométrique des rais sauf au voisinage du point bas. En effet, le maximum de sensibilité du noyau 1D de Fréchet pour une PKIKP de 2 s de période dominante et pour une distance épicentrale de  $174^\circ$  est situé  $\sim 150$  km au-dessus du maximum du noyau géométrique (ce maximum correspondant alors au point bas du rai géométrique). Cela signifierait donc que l'onde "voit" plutôt les anomalies situées au-dessus du point bas géométrique. D'autre part, pour le noyau de Fréchet, ce maximum de sensibilité s'étale beaucoup plus que dans le cas géométrique. Ainsi, une autre différence importante est que la sensibilité de l'onde aux structures situées au-dessous du point bas est nulle dans le cadre de la théorie des rais, tandis que la sensibilité des noyaux de Fréchet s'étale sur plus de 100 km au delà du point bas. Ainsi, lors d'une inversion dans le cadre de la théorie des rais, on est susceptible de décaler les anomalies avec la profondeur. Par ailleurs, à grande distance épicentrale, la sensibilité s'étale plutôt au dessus du point bas.

Enfin, comme les noyaux sont calculés par intégration sur des sphères concentriques, la sensibilité sera nulle au centre. Ainsi, la comparaison des noyaux 1-D pour chacune des deux théories suggère que des biais peuvent être introduits dans des inversions radiales utilisant la théorie des rais.

Pour tester des modèles de graine anisotrope, il faut donc calculer la perturbation du temps de propagation

$$\delta T = \int_r \left( a_0 K_\alpha^{1-D} + \epsilon K_\epsilon^{1-D} + \delta K_\delta^{1-D} \right) dr \quad (4.2)$$

avec  $K_{\alpha,\epsilon,\delta}^{1-D}$  les noyaux de sensibilité 1D pour les perturbations  $a_0$  (perturbation isotrope de vitesse d'onde P),  $\epsilon$  et  $\delta$ . On négligera les contributions de  $\gamma$  et  $\beta$  puisqu'elles ne produisent pas de forward scattering. Cette expression est analogue à celle dérivée dans le cadre de la théorie des rais :

$$\delta T = \int_S \left[ \epsilon (1 - \sin^4 \xi) \frac{1}{\alpha} - \delta \sin^2 \xi \cos^2 \xi \frac{1}{\alpha} - a_0 \frac{1}{\alpha} \right] ds \quad (4.3)$$

avec  $\xi$  l'angle, au niveau du point-bas, entre le rai et l'axe de symétrie et  $S$  le trajet du rai dans le milieu de référence et  $\alpha$  la vitesse d'onde P dans le milieu de référence. Si on considère qu'on a des perturbations anisotropes faibles alors on peut négliger les perturbations de la trajectoire du rai.

Les paramètres utilisés pour décrire l'anisotropie de la graine varient en fonction des auteurs. La table 4.1 donne les relations entre ces paramètres,  $\epsilon$ ,  $\delta$  et  $a_0$  et l'expression asymptotique de la vitesse de propagation des ondes P par rapport à l'axe de symétrie.

$\frac{\delta V}{\alpha} = a_0 + \epsilon \sin^4 \xi - \epsilon + \delta \sin^2 \xi \cos^2 \xi$	$\epsilon$	$\delta$	$a_0$
$\frac{\delta V}{\alpha} = A + B \cos^2 \xi + C \cos^4 \xi$	$-(B + C)$	$-(B + 2C)$	$A$
$\frac{\delta V}{\alpha} = A + B \cos 2\xi + C \cos 4\xi$	$-2B$	$-2(B + 4C)$	$A - B + C$
$\frac{\delta V}{\alpha} = a + e \cos^2 \xi + \sigma \sin^2 \xi \cos^2 \xi$	$-e$	$\sigma - e$	$a$
$\frac{\delta V}{\alpha} = a + (2\beta - \gamma) \cos^2 \xi + (e/2 - 2\beta + \gamma) \cos^4 \xi$	$-e/2$	$2\beta - e - \gamma$	$a$

TAB. 4.1 – Relations entre  $\epsilon$ ,  $\delta$  et  $a_0$  et les différents paramètres anisotropes définis en fonction de l'expression de la vitesse de phase approximative des ondes P dans un milieu transverse isotrope

#### 4.1.2 Modèle de Ishii & Dziewonski

Décrivons maintenant le modèle proposé par Ishii et Dziewonski (2003). C'est le premier modèle qui a proposé l'existence d'une sous-graine. Dans cette sous-graine (notée

IIC par la suite) de rayon 300 km, l'axe de symétrie est rapide et orienté parallèlement à l'axe de rotation de la Terre. Les paramètres anisotropes sont :

	1220-300 km	300-0 km
$\epsilon$	-0.018	-0.037
$\delta$	-0.0247	-0.2340

TAB. 4.2 – Modèle de graine anisotrope de Ishii et Dziewonski (2003)

La figure 4.2 représente les variations de la vitesse des ondes P dans la graine en fonction de la profondeur. Dans la sous-graine, on s'aperçoit que les rais se propageant à  $45^\circ$  de l'axe de rotation de la Terre sont plus lents que les rais polaires (se propageant parallèlement à l'axe de rotation) et que les rais équatoriaux (se propageant dans le plan de l'équateur).

Nous avons comparé la perturbation du temps de propagation calculée avec la théorie des rais et avec des noyaux de sensibilité pour une onde de 2 s de période dominante. Les contributions isotropes ont été négligées. La figure 4.3 (haut) montre les variations de  $\delta T$  en fonction de la distance épacentrale pour des trajets polaires. On observe une différence entre les deux théories pour des distances comprises entre  $165^\circ$  et  $175^\circ$ . En effet, le volume de Fresnel, contrairement à un rai géométrique, commence à échantillonner la sous-graine dès  $165^\circ$  (sensibilité non nulle au-dessous du point bas pour les noyaux de Fréchet 1-D). Pour cette même raison, les variations de  $\delta T$  sont "lissées" avec les noyaux de sensibilité alors qu'on observe une discontinuité en  $\delta T$  avec la théorie des rais. Ainsi, lorsqu'on examine les trajets polaires, si on interprète les données dans le cadre de la théorie des rais, on est susceptible de surestimer le rayon de cette sous-graine (de pratiquement 150 km dans le cas considéré ici).

Sur la figure 4.3 (bas), nous avons représenté  $\delta T$  en fonction de l'angle  $\xi$  du rai par rapport à l'axe de rotation de la Terre pour quatre distances épacentrales. La théorie des rais (lignes en pointillés) est de nouveau comparée avec les noyaux de sensibilité (symboles). Comme précédemment, à grande et à petite distance épacentrale, il n'y a guère de différences, tandis que vers  $174^\circ$  et un angle  $\xi$  autour de  $50^\circ$  les écarts sont de l'ordre de 10%. Il apparaît nettement un changement de régime dans les courbes  $\delta T(\xi)$  obtenues avec la théorie des rais. Ainsi, quand l'onde pénètre profondément dans la graine, on observe une direction lente apparente à environ  $50^\circ$ . Avec les noyaux de sensibilité, l'évolution vers un régime avec une direction lente apparente autour de  $50^\circ$  est plus douce. Le changement

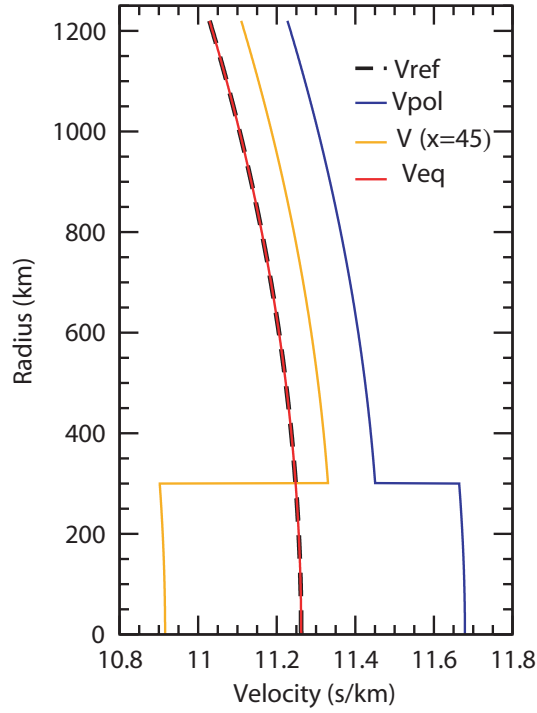


FIG. 4.2 – Variations de la vitesse des ondes P en fonction de la profondeur : modèle de Ishii et Dziewonski (2003). La vitesse de référence est donnée par le modèle PREM (tirets noirs). La propagation des ondes dépend de l'orientation des rais par rapport à l'axe de symétrie de la graine. Dans le modèle de Ishii et Dziewonski (2003), l'axe de symétrie est confondu avec l'axe de rotation de la graine : rais polaires (bleu), rais à  $45^\circ$  (orange) et rais équatoriaux (rouge).



de régime semble se produire dès  $171^\circ$ . Aussi, en examinant les données pour des rais à environ  $50^\circ$ , on serait de nouveau susceptible de surestimer le rayon de la graine.

L'étude de ce problème direct suggère que l'utilisation de la théorie des rais peut conduire à une surestimation du rayon de la sous-graine à condition que la résolution des données soit suffisante. Ainsi, même pour une inversion radiale de l'anisotropie de la graine, on pourrait s'attendre à des écarts entre les inversions avec la théorie des rais et celles avec les noyaux de sensibilités. Est-ce que pour autant cette sous-graine (si elle existe) aurait un rayon inférieur à 300 km ?

En effet, ce modèle est essentiellement basée sur l'observation d'un changement du comportement anisotrope pour des distances épacentrales supérieures à  $173^\circ$  (soit un point-bas à  $r = 300$  km). Par ailleurs, le moyennage des résidus sur la gamme de distances  $165^\circ$ - $173^\circ$  ne permet pas de distinguer un changement du comportement anisotrope pour un rayon compris entre  $\sim 550$  km et 300 km. Le modèle de Ishii et Dziewonski (2003) pose un problème : la valeur de  $\delta$  dans la sous-graine est beaucoup trop grande ( $\delta = -23.4\%$ ) pour que l'on puisse la considérer comme une perturbation du premier ordre (Cormier et Stroujkova, 2005). En effet, si on admet que l'axe de symétrie est toujours parallèle à l'axe de rotation de la Terre, si cette sous-graine a un rayon de seulement 300 km, alors il faut une grande valeur de  $\delta$  pour créer une direction lente apparente à  $50^\circ$ . D'autre part, cette variation d'anisotropie à 300 km du centre de la Terre devrait créer une discontinuité de vitesse d'onde P observable dans les données. Pourtant, Cormier et Stroujkova (2005) ont montré que des sismogrammes synthétiques de PKIKP calculés dans un tel modèle ne sont pas compatibles avec les observations. De même, les données polaires ne semblent pas présenter une triplication (Garcia et al., 2006). S'il existe une discontinuité dans la graine, elle ne se situe pas à un rayon de 300 km ou bien ce n'est pas une discontinuité du premier ordre.

Livrons nous à un petit exercice simple. Si on examine les données de Ishii et Dziewonski (2002) dans la gamme de distance épacentrale  $173^\circ - 180^\circ$ , on se rend compte que le modèle de Ishii et Dziewonski (2003) ne rend pas bien compte des données polaires (malgré les larges barres d'erreur) et finalement seuls les trajets correspondant à  $\xi > 60^\circ$  sont relativement bien expliqués (figure 4.4). Nous avons cependant calculé les perturbations du temps de propagation pour une distance épacentrale de  $175^\circ$  alors que les données correspondent à une large gamme de distances entre  $173^\circ$  et  $180^\circ$ . Existe-t-il d'autres modèles de graine susceptibles de rendre compte des données ? Si l'analyse des formes d'onde ne nécessite pas la présence d'une discontinuité de vitesse à un rayon de 300 km (Cormier et Stroujkova, 2005; Garcia et al., 2006), par contre, les données sur l'atténuation dans la

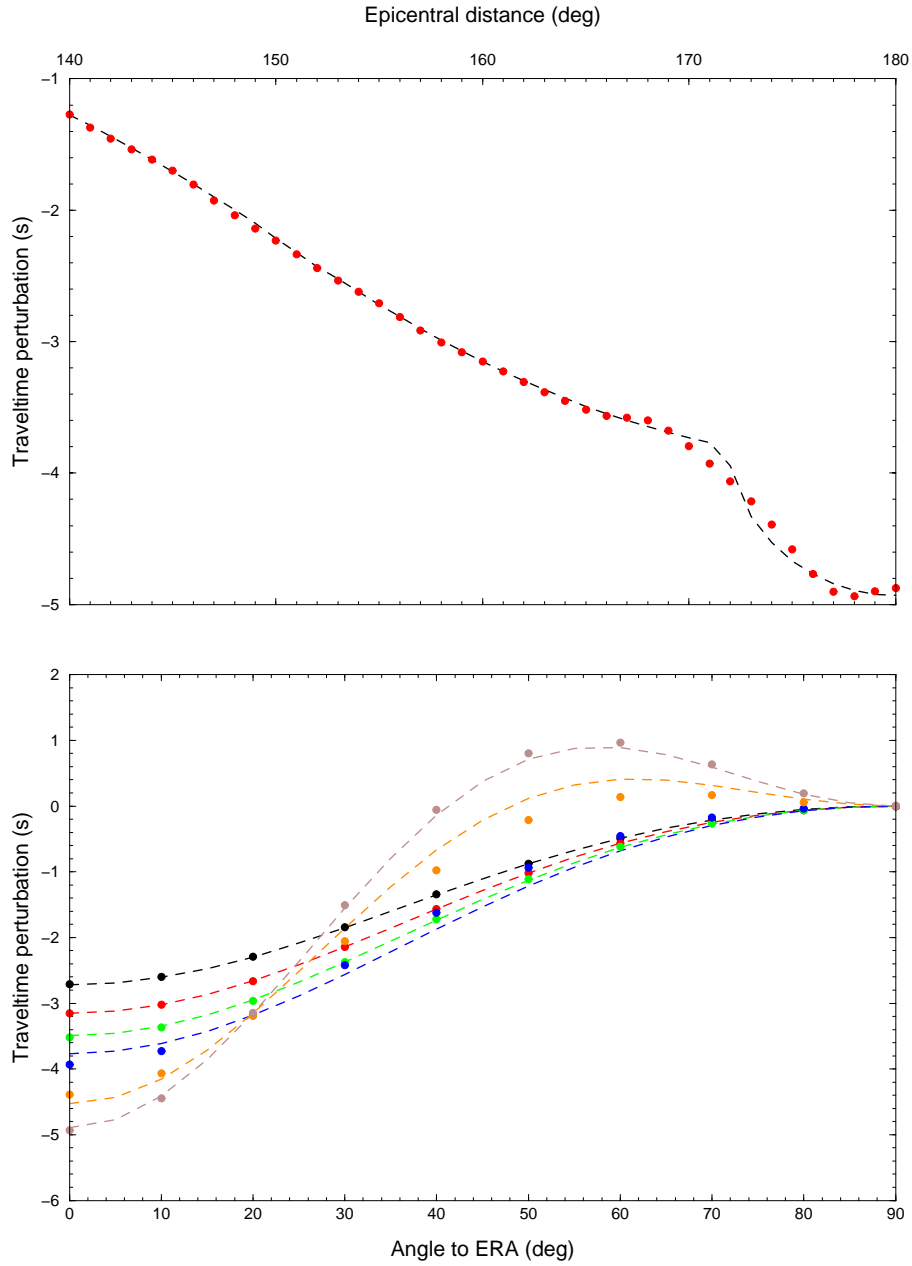


FIG. 4.3 – Modèle de Ishii et Dziewonski (2003) avec un axe de symétrie parallèle à l’axe de rotation de la Terre : comparaison entre la théorie des noyaux de sensibilité (cercles) et la théorie géométrique des rais (lignes). (haut) Variations de la perturbation du temps de propagation pour des trajets polaires en fonction de la distance épacentrale. La ligne en pointillés correspond à la prédiction de la théorie des rais et les cercles à celle des noyaux de sensibilité pour une période dominante de 2 s. (bas) Variations de la perturbation du temps de propagation en fonction de l’angle  $\xi$  et pour différentes distances épacentrales :  $155^\circ$  (noir),  $160^\circ$  (rouge),  $165^\circ$  (vert),  $171^\circ$  (bleu),  $174^\circ$  (orange) et  $178^\circ$  (marron).

graine suggère plutôt un changement du comportement sismique autour de  $r = 550$  km (Cormier et Stroujkova, 2005). Par ailleurs, si on augmente le volume de la sous-graine, on pourra diminuer l'amplitude des paramètres anisotropes. Examinons donc si des modèles avec une sous-graine plus grosse ne pourraient pas tout aussi bien expliquer les données à grande et petite distance épacentrale. Puisque l'existence de cette sous-graine s'appuie essentiellement sur les résidus dans la gamme de distances  $173^\circ - 180^\circ$ , nous considérerons des modèles de graine à deux couches dont la partie supérieure reprend les paramètres anisotropes du modèles de Ishii et Dziewonski (2003) afin que nos modèles restent compatibles avec ce dernier aux courtes distances épacentrales.

La figure 4.4 montre les prédictions de différents modèles de graine à deux couches reproduisant la direction lente autour de  $55^\circ$  dans la gamme de distance épacentrale  $173^\circ - 180^\circ$ . Les principales caractéristiques de ces modèles sont résumées dans la table 4.3.

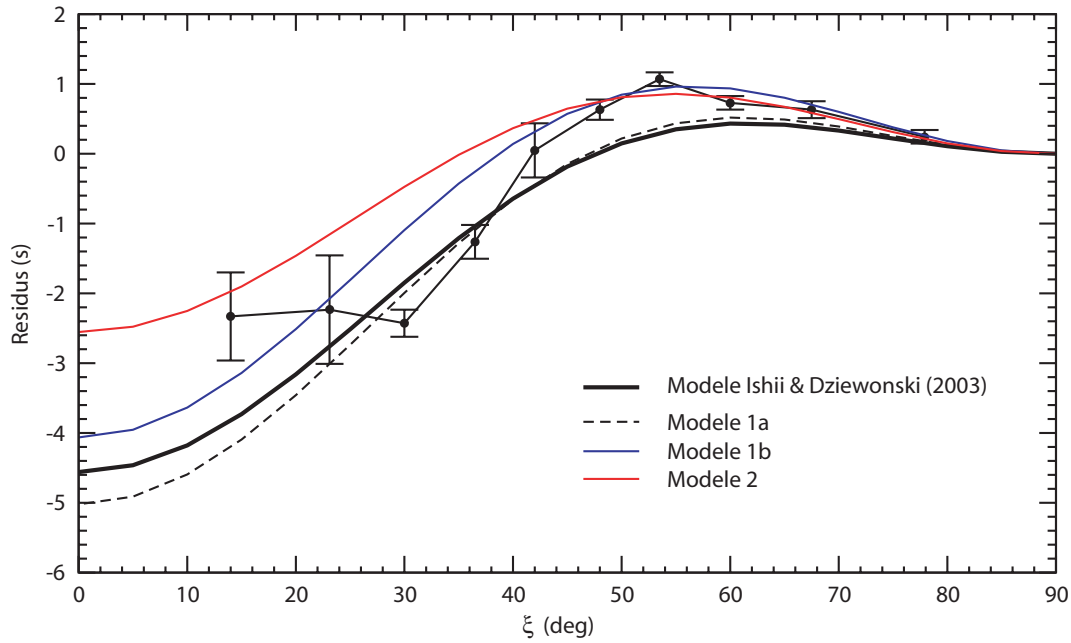


FIG. 4.4 – Prédictions de 4 modèle de graine à deux couches compatibles avec les données de Ishii et Dziewonski (2002) (cercles noirs) dans la gamme de distance épacentrale  $173^\circ - 180^\circ$ . Les barres d'erreur correspondent à  $1\sigma$ . Les caractéristiques anisotropes des 4 modèles sont résumées dans la table 4.3.

Ainsi, si on augmente le rayon de la sous-graine d'un facteur 2 en diminuant le paramètre  $\delta$  de ce même facteur (modèle 1a), le modèle résultant a bien des caractéristiques proches du modèle de Ishii et Dziewonski (2003) aux grandes distances épacentrales. À courte distance épacentrale, les caractéristiques du modèle 1a et de celui de Ishii et Dze-

wonski (2003) étant semblables, les prédictions des deux modèles sont identiques. Cependant, comme nous l'avons vu sur la figure 4.3b, aux distances intermédiaires entre  $160^\circ$  et  $165^\circ$  environ (dans le cas présent), il y aura quelques écarts entre les deux modèles si on les examine dans le cadre de la théorie des rais. Si on tient compte du volume de Fresnel, les prédictions des deux modèles seront proches dans l'ensemble de la gamme de distances épicentrales.

Modèle	$R_{iic}$	$\epsilon$		$\delta$	
		$R_{IC} - R_{iic}$	$R_{iic} - 0$	$R_{IC} - R_{iic}$	$R_{iic} - 0$
Ishii et Dziewonski (2003)	300 km	-0.018	-0.0247	-0.037	-0.2340
Modèle 1a	600 km	-0.018	-0.025	-0.030	-0.120
Modèle 1b	600 km	-0.018	-0.025	-0.020	-0.120
Modèle 2	400 km	-0.018	-0.025	+0.005	-0.110

TAB. 4.3 – Exemple de modèle de graine à deux couches donnant des perturbations du temps de propagation des PKP(DF) similaires au modèle de Ishii et Dziewonski (2003)

On remarque également, qu'avec un taux d'anisotropie quasiment constant dans tout le volume de la graine et avec seulement une augmentation du paramètre  $\delta$  dans la sous-graine (modèle 1b), on reproduit un peu mieux la "bosse" observée sur les données autour de  $\xi = 55^\circ$ . Par ailleurs, pour obtenir une direction lente apparente autour de  $50^\circ$ , on peut imaginer des modèles avec un taux d'anisotropie très faible dans la sous-graine comme par exemple le modèle 2. De la même façon, si l'axe de symétrie rapide bascule dans le plan de l'équateur dans la partie centrale, on peut également créer cette direction lente apparente. Ainsi, on s'aperçoit, de façon très qualitative, que des modèles de graine à deux couches très différents pourrait expliquer un même jeu de données (voir figure 4.5), d'autant plus si on ne dispose pas de beaucoup de données polaires.

Le problème de la structure anisotrope de la graine ne présente probablement pas une solution unique, comme le montre la variété des modèles de graine proposés dans la littérature. Par ailleurs, on remarque qu'aucun des modèles présentés précédemment ne permet de décrire correctement les données correspondant aux plus petites valeurs de  $\xi$ . Compte tenu de la position des sources et des récepteurs à la surface de la Terre, on ne dispose pas de beaucoup de données polaires. De plus, les processus de moyennage en rais résumés des données avant inversion réduit encore leur nombre tout particulièrement aux grandes distances épicentrales. L'absence de ces données polaires ne permet pas de contraindre correctement l'anisotropie et risque fort probablement d'accentuer la non-

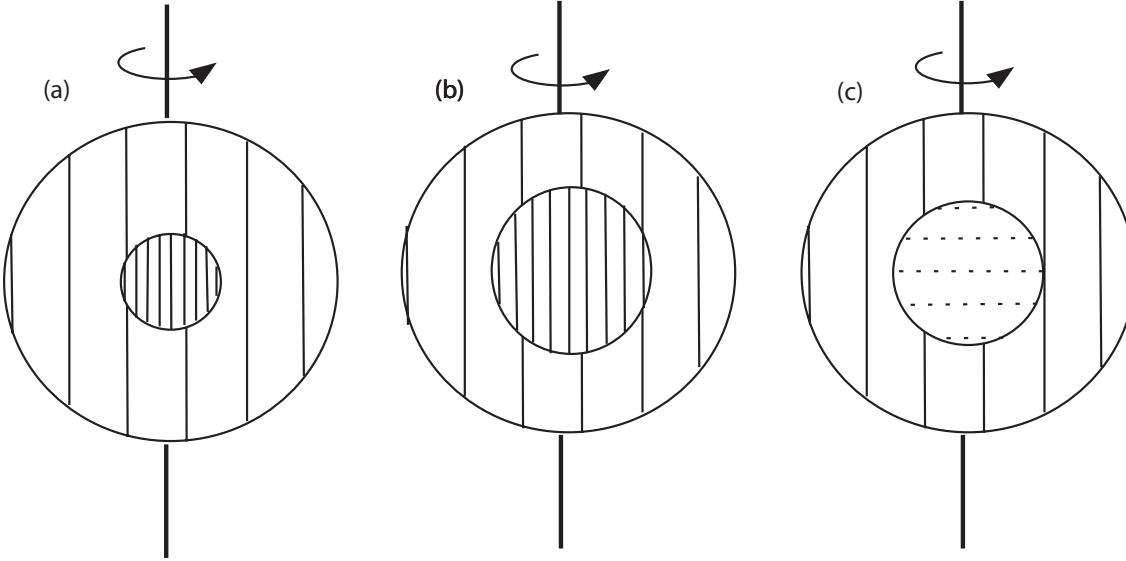


FIG. 4.5 – Exemple de trois modèles de graine présentant une direction lente apparente autour de  $50^\circ$  par rapport à l'axe de rotation de la graine : (a) Modèle de Ishii et Dzierwonski (2003) : augmentation forte de l'anisotropie dans une sous-graine de 300 km de rayon avec un axe de symétrie rapide parallèle à l'axe de rotation de la Terre ; (b) Modèle 1 (a et b) : augmentation faible de l'anisotropie dans une sous-graine de 600 km de rayon avec un axe de symétrie lent parallèle à l'axe de rotation de la Terre ; (c) Modèle 2 : sous-graine de 400 km de rayon avec un taux d'anisotropie très faible voire un basculement de l'axe de symétrie rapide dans le plan de l'équateur.

unicité des solutions de l'inversion. On peut donc légitimement s'interroger sur l'existence ou non de cette sous-graine. On peut également se demander quel pourrait être l'apport des noyaux de sensibilité à une telle étude.

Dans les sections suivantes, on se propose donc de réaliser une nouvelle inversion de la graine à partir des données du fichier EHB (Engdahl et al., 1998), afin de tester les différentes structures anisotropes possibles de la graine et l'existence d'une sous-graine. L'introduction dans le processus d'inversion d'une information a priori sur l'amplitude et surtout le signe des perturbations anisotropes nous permet d'explorer des modèles qui présenteraient par exemple un axe lent parallèle à l'axe de rotation de la Terre. Nous avons cherché quelles sont les familles de modèles de graine pouvant expliquer les données du fichiers EHB.

## 4.2 Traitements des données du fichier EHB

### 4.2.1 Résidus des ondes PKIKP

Nous avons utilisé les résidus de temps de propagation des ondes PKIKP issus du fichier EHB (Engdahl et al., 1998) qui a été construit à partir du fichier ISC (International Seismological Centre). Un résidu est la différence entre le temps de propagation mesuré et le temps de propagation calculé dans un modèle de référence. Les résidus de PKP(DF) ont été calculés dans le modèle de référence ak135 (Kennett et al., 1995). Ces résidus sont corrigés de l'ellipticité de la Terre, de l'élévation de la station et des anomalies à la station (liées aux hétérogénéités du manteau supérieur sous la station).

Nous n'avons conservé que les distances épacentrales comprises entre  $150^\circ$  et  $180^\circ$ , rejetant les données dans la gamme  $140^\circ - 150^\circ$  correspondant à la triplification des phases PKP (les phases plus lentes PKP(AB) ou PKP(BC) ont pu être pointées à la place de PKP(DF)). D'autre part, à plus petite distance épacentrale, il y a une forte contribution des précurseurs de PKP (e.g. Cleary et Haddon, 1972). L'exclusion des courtes distances épacentrales a pour conséquence que ce jeu de données est peu sensible à la structure de la graine dans les 200 premiers kilomètres. Les inversions réalisées avec ces données auront donc une faible résolution dans ce domaine de profondeur.

Comme il s'agit d'une étude de la structure radiale de la graine anisotrope, les trajets ont été ensuite sélectionnés en fonction de leur paramètre de rais, c'est-à-dire en fonction de la profondeur du point bas géométrique.

La figure 4.6 montre la distribution des résidus dans six gammes de distances épacen-

trales similaires à celles de Ishii et Dziewonski (2002). On constate que les résidus sont essentiellement compris entre -4 s et +4 s. Pour des distances épicentrales au voisinage de la triplication des ondes PKP, on peut dépouiller les phases PKP(AB) ou PKP(BC) qui sont plus lentes que la phase PKP(DF), et les distributions respectives des résidus se superposent. Ainsi, entre  $150^\circ$  et  $153^\circ$ , la distribution des résidus des PKP(DF) est encore polluée par des résidus de PKP(BC) (Fig 4.6a).

De façon générale, on constate que les distributions sont relativement bien centrées sur la valeur moyenne pratiquement nulle des résidus montrant que le modèle moyen utilisé pour calculer les résidus rend plutôt bien compte des données. D'autre part, ces histogrammes sont symétriques et donc les erreurs aléatoires (dues par exemple aux horloges) et les perturbations liées aux hétérogénéités dans le manteau jouent dans les deux sens.

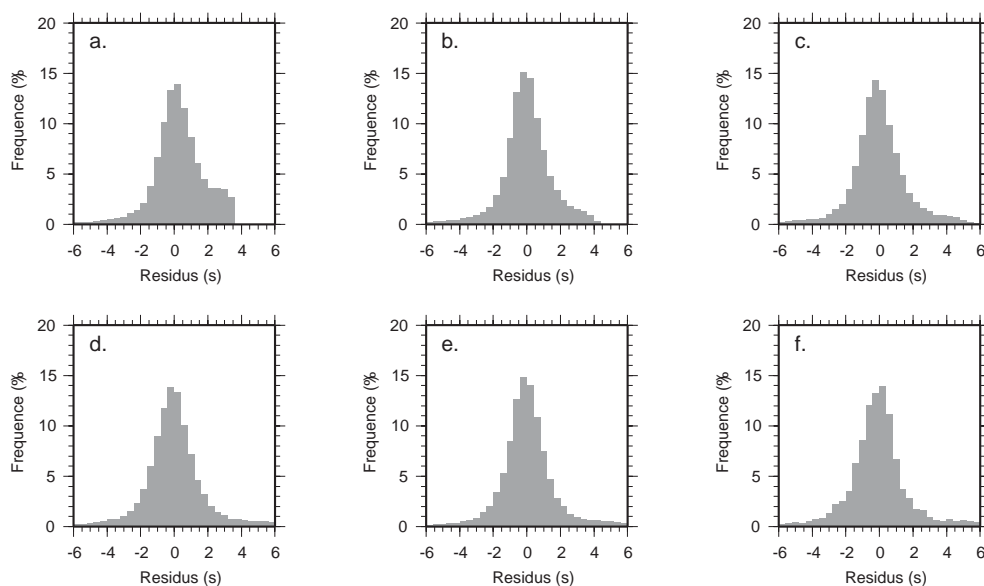


FIG. 4.6 – Distributions des résidus du fichiers EHB dans 6 gammes de distances épicentrales : (a) entre  $150^\circ$  et  $153^\circ$ , (b) entre  $153^\circ$  et  $155^\circ$ , (c) entre  $155^\circ$  et  $160^\circ$ , (d) entre  $160^\circ$  et  $165^\circ$ , (e) entre  $165^\circ$  et  $173^\circ$ , (f) entre  $173^\circ$  et  $180^\circ$ . Pour les courtes distances épicentrales, les résidus trop fortement positifs sont attribués à la phases PKP(BC).

La figure 4.7 montre la distribution géographique des points milieux pour les six gammes de distances épicentrales. Elle reflète la distribution inhomogène des sources sismiques et des stations à la surface du globe. Il y a beaucoup moins de données à grande distance épicentrale (voir table 4.4) et donc l'échantillonnage en profondeur n'est pas non plus homogène.

Le paramètre principal pour décrire l'anisotropie de la graine est l'angle  $\xi$  : l'angle

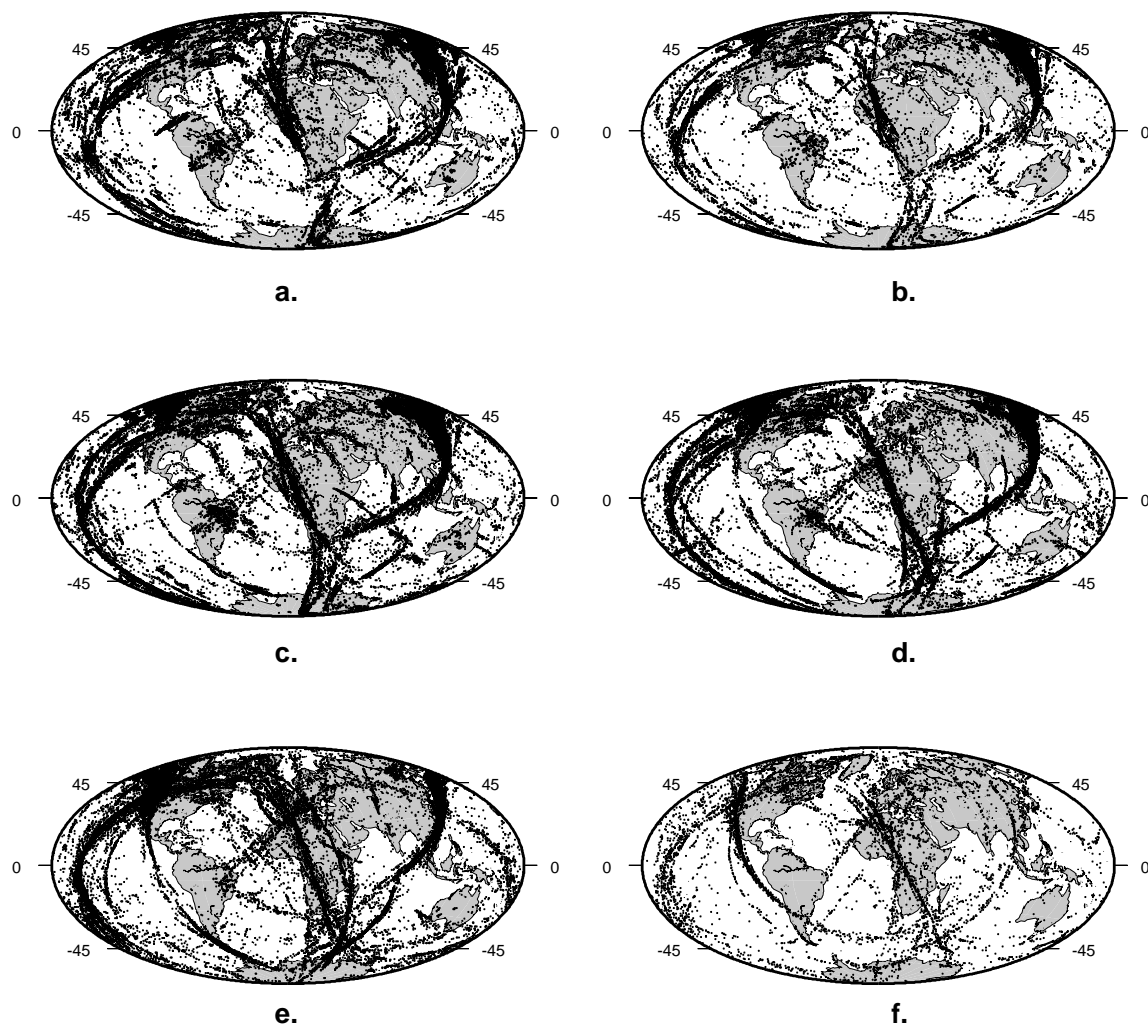


FIG. 4.7 – Distribution géographique des points milieux des rais PKP(DF) pour les six gammes de distances épicentrales : (a)  $150^{\circ}$ - $153^{\circ}$ , (b)  $153^{\circ}$ - $155^{\circ}$ , (c)  $155^{\circ}$ - $160^{\circ}$ , (d)  $160^{\circ}$ - $165^{\circ}$ , (e)  $165^{\circ}$ - $173^{\circ}$ , (f)  $173^{\circ}$ - $180^{\circ}$ .



$\Delta$	Nombre de données	$\delta T_{moy}$ (s)	$\sigma$ (s)
$150^\circ - 153^\circ$	28331	+0.41	1.82
$153^\circ - 155^\circ$	13558	+0.2438	1.85
$155^\circ - 160^\circ$	27886	+0.2752	1.90
$160^\circ - 165^\circ$	24687	+0.2901	1.92
$165^\circ - 173^\circ$	20610	+0.1653	2.00
$173^\circ - 180^\circ$	3228	-0.1265	2.04

TAB. 4.4 – Résidus des ondes PKP(DF) : valeur moyenne et écart-type. À courte distance épicentrale ( $\Delta < 153^\circ$ ), le résidu moyen est plutôt positif. Il est possible que des phases PKP(AB) ou PKP(BC) aient été dépouillées au lieu de la PKP(DF). À grande distance épicentrale, le résidu moyen est plutôt négatif : les trajets sont en moyenne plus rapides. Cependant on dispose de beaucoup moins de données dans cette dernière gamme de distances.

entre l’axe de rotation de la Terre et le rai au niveau du point bas. Les trajets les plus anisotropes correspondent aux faibles valeurs de  $\xi$ . Pour décrire l’anisotropie de la graine, il faudrait une bonne distribution spatiale des données mais aussi une bonne distribution géométrique (distribution en  $\xi$ ). Compte tenu de la distribution à la surface du globe des séismes et des stations, on remarque qu’il y a peu de trajets polaires surtout aux grandes distances épicentrales (Figure 4.8). C’est une limitation importante pour la détermination de l’anisotropie de la graine. On peut également noter un excès de données pour  $\xi \sim 60^\circ$ , correspondant aux séismes de la zone Fidji-Tonga enregistrés en Europe.

Examinons les résidus moyens en fonction de la distance épicentrale (figure 4.9) pour des rais polaires ( $\xi < 30^\circ$ ), des rais équatoriaux ( $\xi > 60^\circ$ ) et pour les rais intermédiaires ( $30^\circ < \xi < 60^\circ$ ). On constate que les résidus moyens polaires sont généralement négatifs et plus rapides que les rais équatoriaux et intermédiaires sur toute la gamme de distance épicentrale entre  $150^\circ$  et  $180^\circ$ . Les trajets équatoriaux et intermédiaires ont des résidus moyen plutôt proches de zéro (le modèle de référence décrit relativement bien ces trajets). Généralement les trajets intermédiaires sont plus rapides que les trajets équatoriaux. Cependant, on observe que la tendance s’inverse (les barres d’erreur n’ont pas été représentées) pour des distances supérieures à  $170^\circ$  : une direction lente pourrait exister entre  $30^\circ$  et  $60^\circ$  de l’axe de rotation.

Nous avons aussi calculé, dans le cadre de la théorie des rais, des corrections de manteau dans le modèle 3D de vitesse d’onde P de Van der Hilst et al. (2004) (Figure 4.10) afin de

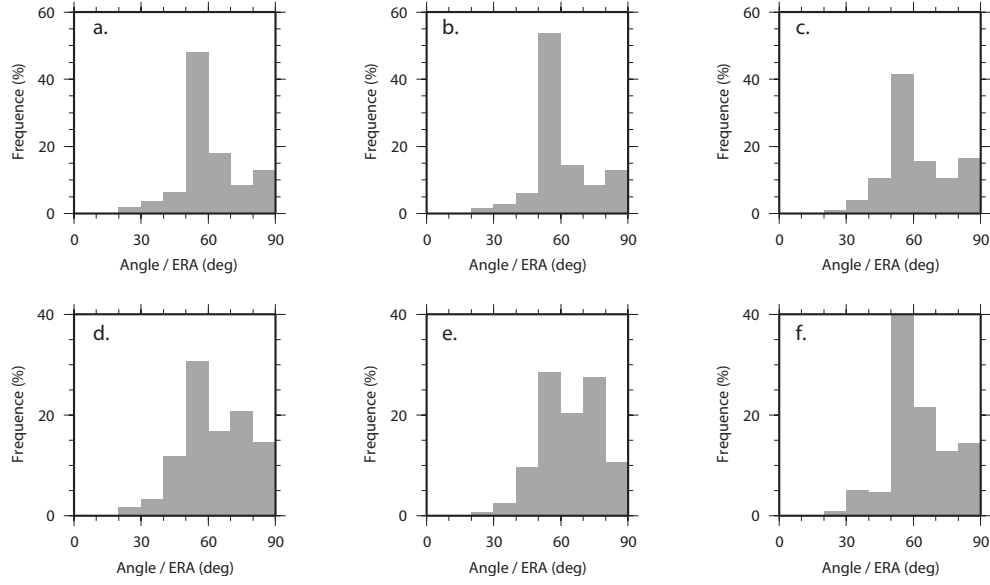


FIG. 4.8 – Distribution des données en fonction de l'angle  $\xi$  entre la tangente au rai à son point bas et l'axe de rotation de la Terre pour les six gammes de distances épicentrales : (a)  $150^\circ$ - $153^\circ$ , (b)  $153^\circ$ - $155^\circ$ , (c)  $155^\circ$ - $160^\circ$ , (d)  $160^\circ$ - $165^\circ$ , (e)  $165^\circ$ - $173^\circ$ , (f)  $173^\circ$ - $180^\circ$ . Le nombre total de données par gammes de distance est rappelé dans la table 4.4.

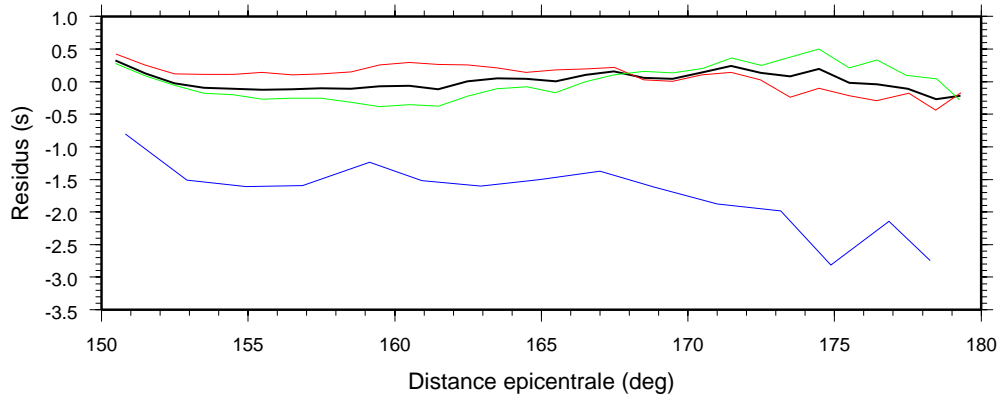


FIG. 4.9 – Résidus moyens en fonction de la distance épicentrale : pour tous les trajets (noir), pour les trajets polaires (bleu), les trajets équatoriaux (vert) et les trajets intermédiaires (rouge). On a utilisé des classes de  $1^\circ$  en distance épicentrale pour les trajets équatoriaux et intermédiaires, et des classes de  $2^\circ$  pour les trajets polaires.

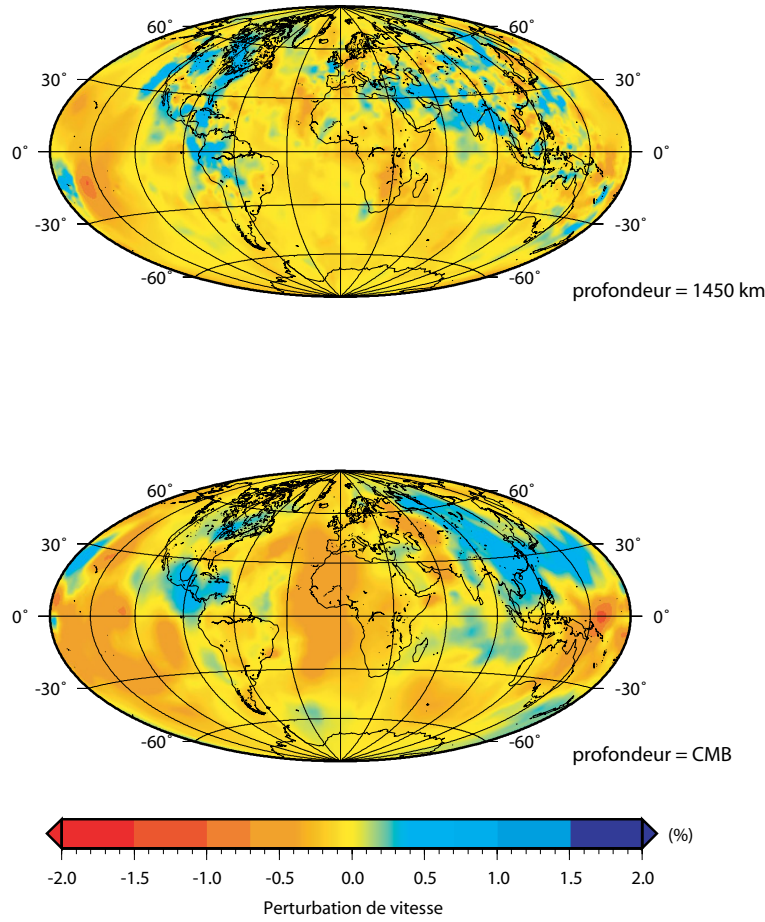


FIG. 4.10 – Modèle en vitesse d'onde P de Van der Hilst et al. (2004) pour deux profondeurs.

les comparer avec les corrections de station. Ces corrections sont calculées dans le cadre de la théorie des rais afin d'être consistant avec la méthode utilisée pour construire ce modèle de manteau. Les temps absolus sont très sensibles aux hétérogénéités rencontrées par le rayonnement sismique. Des corrections de la structure de la croûte et du manteau sont nécessaires pour dégager au mieux le signal associé à l'anisotropie de graine. Ainsi, afin de s'affranchir au mieux de ces corrections, on peut également utiliser des temps différentiels entre les phases PKP. Comme ces phases ont des trajectoires très proches dans le manteau supérieur, elles permettent de réduire la contribution des hétérogénéités au voisinage de la source et du récepteur. Par contre à grande distance épicentrale, ces trajectoires deviennent sensiblement différentes et les temps différentiels peuvent être fortement affectés par les anomalies dans le manteau inférieur et surtout dans la couche D" (Bréger et al., 2000).

### 4.2.2 Rais résumés

Afin de réduire les effets du mauvais échantillonnage de la Terre, du bruit et des structures dans le manteau, les données sont regroupées en rais résumés. Ces rais résumés seront ensuite moyennés afin d'obtenir la perturbation du temps de propagation en fonction de l'angle  $\xi$  du rai par rapport à l'axe de rotation de la Terre. Cette deuxième moyenne élimine les variations longitudinales comme les variations hémisphériques de  $\delta T$  pour les PKP(DF) (e.g. Tanaka et Hamaguchi, 1997; Creager, 1999; Garcia et Souriau, 2000). On considère que l'on obtiendra principalement la partie cylindrique de l'anisotropie de la graine.

Les rais résumés sont construits à partir de fichiers regroupant les données en gamme de distance épicentrale. D'autre part, nous avons utilisé deux façons différentes de calculer des rais résumés : l'une (géographique) tend à contrebalancer la mauvaise répartition géographique des sources et des récepteurs, l'autre (géométrique) contrebalance la mauvaise distribution en  $\xi$  des trajets (à grande distance épicentrale, on a beaucoup moins de trajets polaires que de trajets équatoriaux). Avec ces deux méthodes de calcul des rais résumés, on peut tester la robustesse des données dans une inversion.

#### Rais résumés géographiques

Pour construire les rais géographiques, la surface de la Terre est découpée en secteurs d'aire égale de  $10^\circ$  en latitude et  $10^\circ / \cos(\lambda)$  en longitude, avec  $\lambda$  la latitude moyenne du secteur (Figure 4.11).



FIG. 4.11 – Exemple de grille pour la construction des rais géométriques.

Chaque rai résumé géographique correspond à l'ensemble des trajets qui se propagent d'un secteur à un autre.



Il faut donc tenir compte de la profondeur de la source. On a donc prolongé les rais en surface définissant ainsi de nouvelles coordonnées de la station afin de diminuer la dispersion en profondeur des trajets au sein d'un même rai résumé. On ne conservera que les rais résumés construits à partir d'au moins cinq trajets. Statistiquement, ce nombre de trajets n'est pas très satisfaisant. Si on augmente ce nombre, il sera plus difficile d'avoir des rais résumés polaires aux grandes distances épicentrales (Figure 4.12). Cette méthode permet de donner moins de poids à des trajets dits anormaux, tels que ceux associés aux îles Sandwich Sud, mais elle ne permet pas de conserver beaucoup de trajets polaires. La figure 4.12 donne des détails sur la distribution des trajets des rais résumés dans trois couches. De façon générale, on constate que pour les trajets équatoriaux toute la gamme des résidus est globalement présente avec peut-être une dominante des résidus positifs aux plus courtes distances, tandis que les trajets polaires sont très souvent associés à des résidus négatifs donc à des trajets plus rapides. On remarque également que des rais résumés très proches géographiquement peuvent avoir des résidus très différents, d'où l'intérêt de prendre un maximum de trajets par rais résumés.

#### Rais résumés géométriques

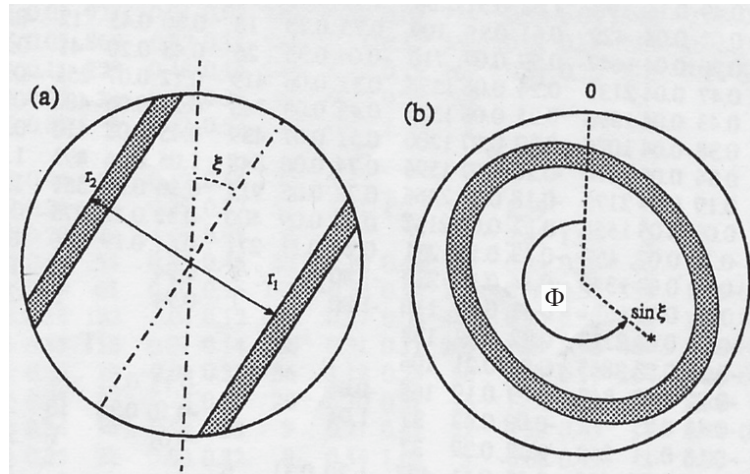


FIG. 4.13 – Principe de la construction des rais géométriques (d'après Su et Dziewonski (1995)) : (a) Section dans un plan méridien de la graine. La zone grisée correspond aux rais qui ont un point-bas compris entre un rayon  $r_1$  et  $r_2$  et une inclinaison par rapport à l'axe de rotation de la Terre  $\xi$ . (b) Section dans le plan équatorial de la graine. La projection du point d'intersection entre le rai et la surface de la graine est repérée par une \*. Sa position est repérée par la longitude  $\Phi$ .

Les rais résumés géométriques (voir Figure 4.13) sont construits selon des critères géo-

métriques, c'est-à-dire en fonction de l'angle  $\xi$  et de la longitude du point bas  $\Phi$  (Su et Dziewonski, 1995; Ishii et Dziewonski, 2003). L'angle  $\xi$  est donné par la relation suivante :

$$\xi = \cos^{-1}(\sin \theta \cdot \cos \psi) \quad (4.4)$$

avec  $\theta$  la colatitute du point-bas du rai et  $\psi$  l'azimut du rai au point bas (angle par rapport au méridien local). Ces deux angles,  $\xi$  et  $\Phi$ , définissent une colatitute et une longitude sur la sphère unité. Cette sphère est alors divisée en secteurs d'aire égale de  $10^\circ$  en  $\xi$  et  $10^\circ / \sin(\xi)$  en  $\Phi$ . Comme pour le cas précédent, nous ne garderons que les rais construits à partir d'au moins cinq trajets. L'avantage principal de cette deuxième méthode est de conserver d'avantage de rais polaires. Ce type de stacking permet également de rechercher plus facilement une inclinaison possible de l'axe de symétrie par rapport à l'axe de rotation de la Terre (Su et Dziewonski, 1995; Ishii et Dziewonski, 2003).

### 4.2.3 Variation des résidus en fonction de $\xi$

On observe que les variations des résidus en fonction de  $\xi$  sont similaires pour les deux types de rais résumés (Figure 4.14) dans la gamme de distances épacentrales  $153^\circ$ - $155^\circ$  : les trajets polaires ( $\xi < 30^\circ$ ) ont des résidus négatifs tandis que les trajets équatoriaux ( $\xi > 60^\circ$ ) sont plus lents. Par ailleurs, les corrections à la station du fichier EHB de même que les corrections de manteau agissent de façon relativement similaire. Ces corrections confirment que le manteau n'est pas responsable des résidus polaires négatifs.

La figure 4.15 complète la gamme de distance épacentrale et montre les résidus en fonction de l'angle  $\xi$ , pour six gammes de distances épacentrales, pour les deux types de rais résumés, et pour les deux types de corrections de manteau.

L'anisotropie dans la graine se manifeste par une variation des résidus  $\delta T$  en fonction de l'orientation du rai par rapport à l'axe de rotation de la Terre. La gamme de distances épacentrales examinées ici, entre  $150^\circ$  et  $180^\circ$ , nous permet d'étudier les propriétés anisotropes de la graine pour un rayon inférieur à  $\sim 1000$  km.

Pour des distances épacentrales supérieures à  $150^\circ$ , on observe généralement que les rais polaires ( $\xi < 30^\circ$ ) sont plus rapides que les rais équatoriaux ( $\xi > 60^\circ$ ). Cependant, dans la gamme de distances  $155^\circ$ - $165^\circ$ , les résidus très polaires ( $\xi < 15^\circ$ ) obtenus à partir du stack géométrique sont anormalement lents pour cette orientation. Ces anomalies étaient déjà observées par Ishii et Dziewonski (2002) (Figure 4.16). Pour pouvoir observer une telle tendance, il faut supposer l'existence de trajets polaires lents ayant des résidus positifs. Examinons la distribution des résidus pour  $\xi < 20^\circ$  sur l'ensemble du jeu de données. On

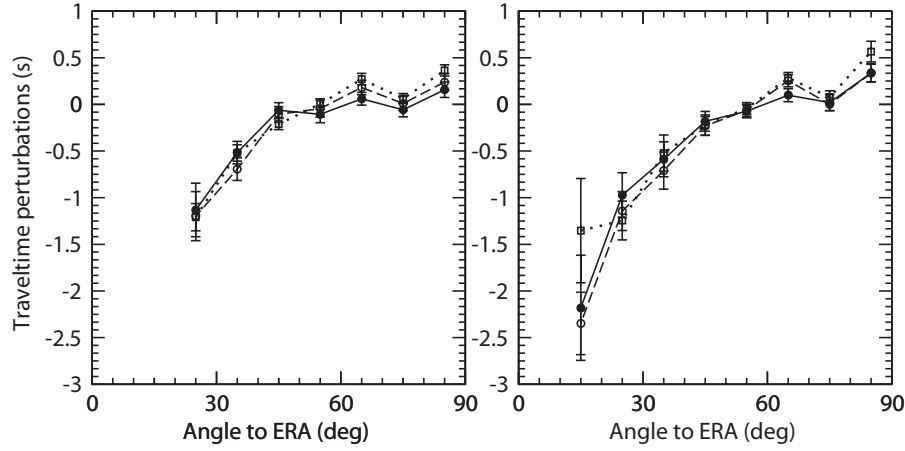


FIG. 4.14 – Variations des résidus des PKP(DF) en fonction de l'angle  $\xi$  obtenus pour les rais résumés géographiques (gauche) et pour les rais géométriques (droite), dans la gamme de distance épacentrale  $153^\circ - 155^\circ$ . Les carrés blancs correspondent aux données du fichier EHB avec les corrections d'ellipticité et de topographie. Les cercles noirs correspondent aux données EHB avec la correction d'ellipticité, de topographie et de station. Enfin, les cercles blanc correspondent aux données EHB avec la correction d'ellipticité, de topographie et la correction de manteau calculée dans le modèle 3-D de Van der Hilst et al. (2004). Les barres d'erreur représentent un écart-type.



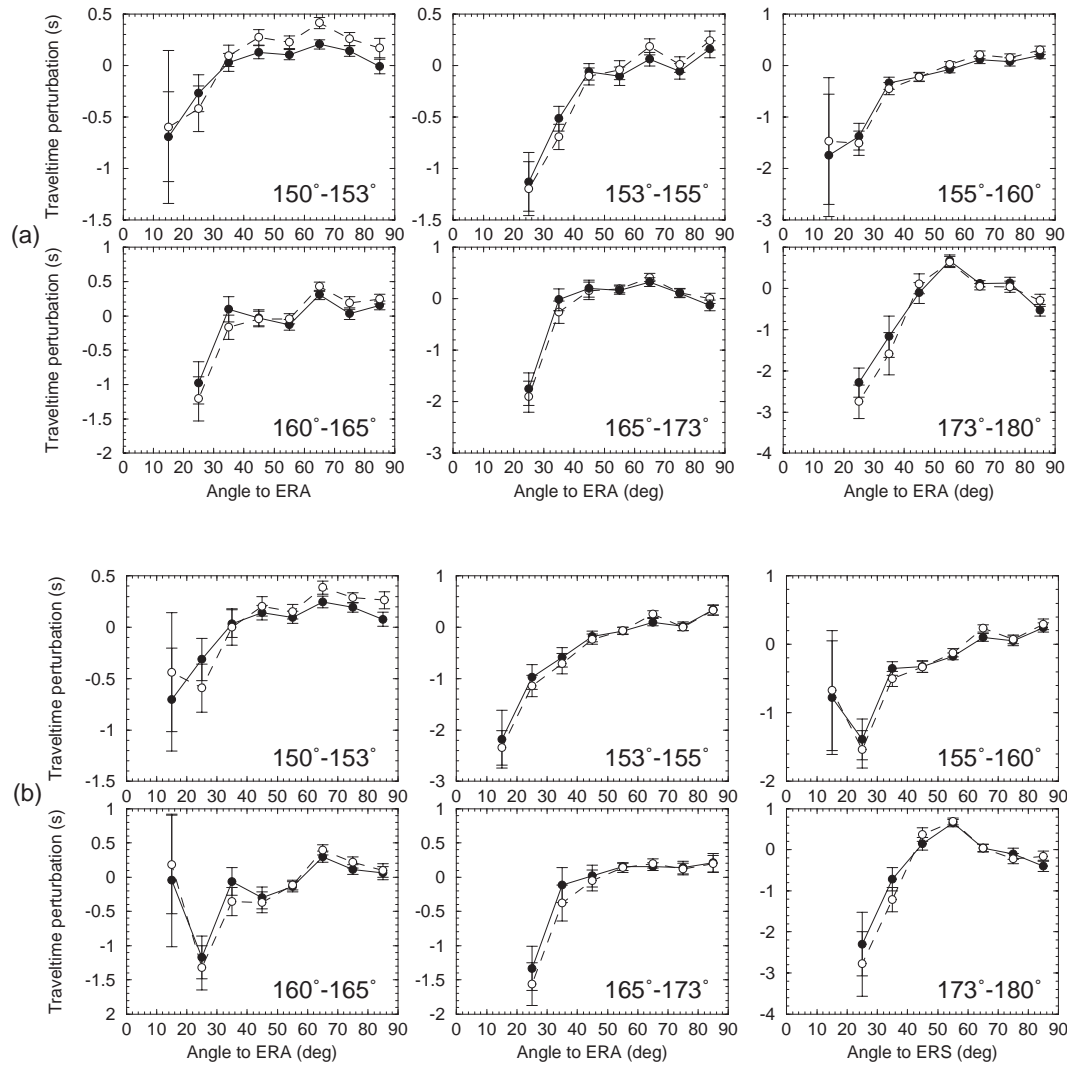


FIG. 4.15 – Variations des résidus des PKP(DF) en fonction de l'angle  $\xi$  obtenus pour les rais résumés géographiques (a) et pour les rais géométriques (b) pour les six gammes de distances épacentrales. Les cercles noirs correspondent aux données EHB avec la correction d'ellipticité, de topographie et de station. Les cercles blancs correspondent aux données EHB avec la correction d'ellipticité, de topographie et la correction de manteau calculée dans le modèle de Van der Hilst et al. (2004). Les barres d'erreur représentent un écart-type.

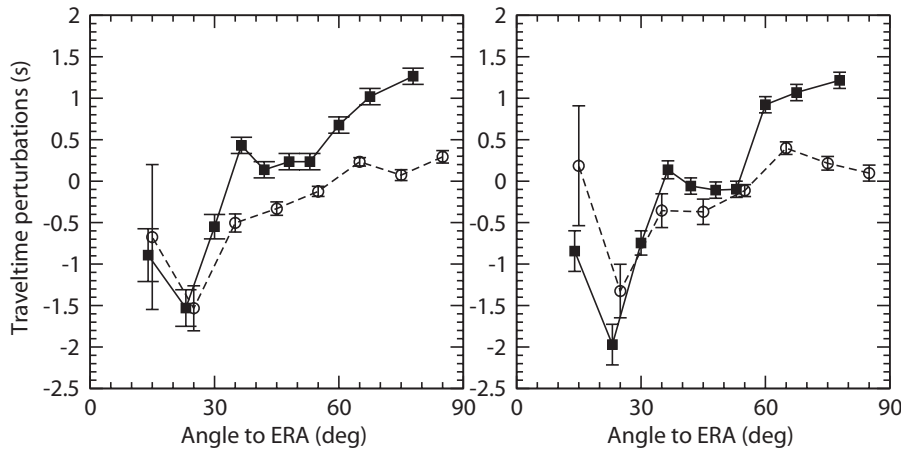


FIG. 4.16 – Comparaison entre les résidus géométriques obtenus à partir du fichier EHB (cercles blancs) et les données de Ishii et Dziewonski (2002) pour les gammes de distances épicentrales  $155^\circ$ - $160^\circ$  (gauche) et  $160^\circ$  –  $165^\circ$ .

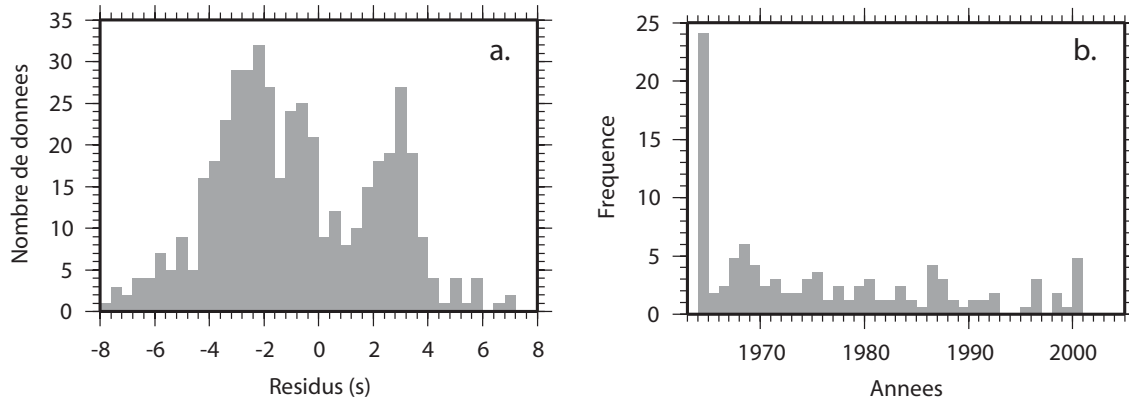


FIG. 4.17 – Résidus très polaires  $\xi < 15^\circ$  : (a) Distribution des résidus, (b) Dates d'enregistrement.

constate que les résidus très polaires ont une distribution clairement bimodale (Figure 4.17), avec un premier maximum pour des résidus positifs et un second pour des résidus négatifs. Un pourcentage important des résidus positifs est enregistré en 1964 (25% des résidus positifs). En effet, dans la gamme  $150^\circ$ - $155^\circ$ , on trouve les événements de la crise d'Alaska de 1964 enregistrés au pôle Sud qui présentent un grand nombre de résidus très positifs (Figure 4.18a). De plus, la distribution géographique de ces trajets montre également une forte variabilité en longitude de ces résidus : des trajets très proches peuvent avoir des résidus de signe opposé (Figure 4.18).

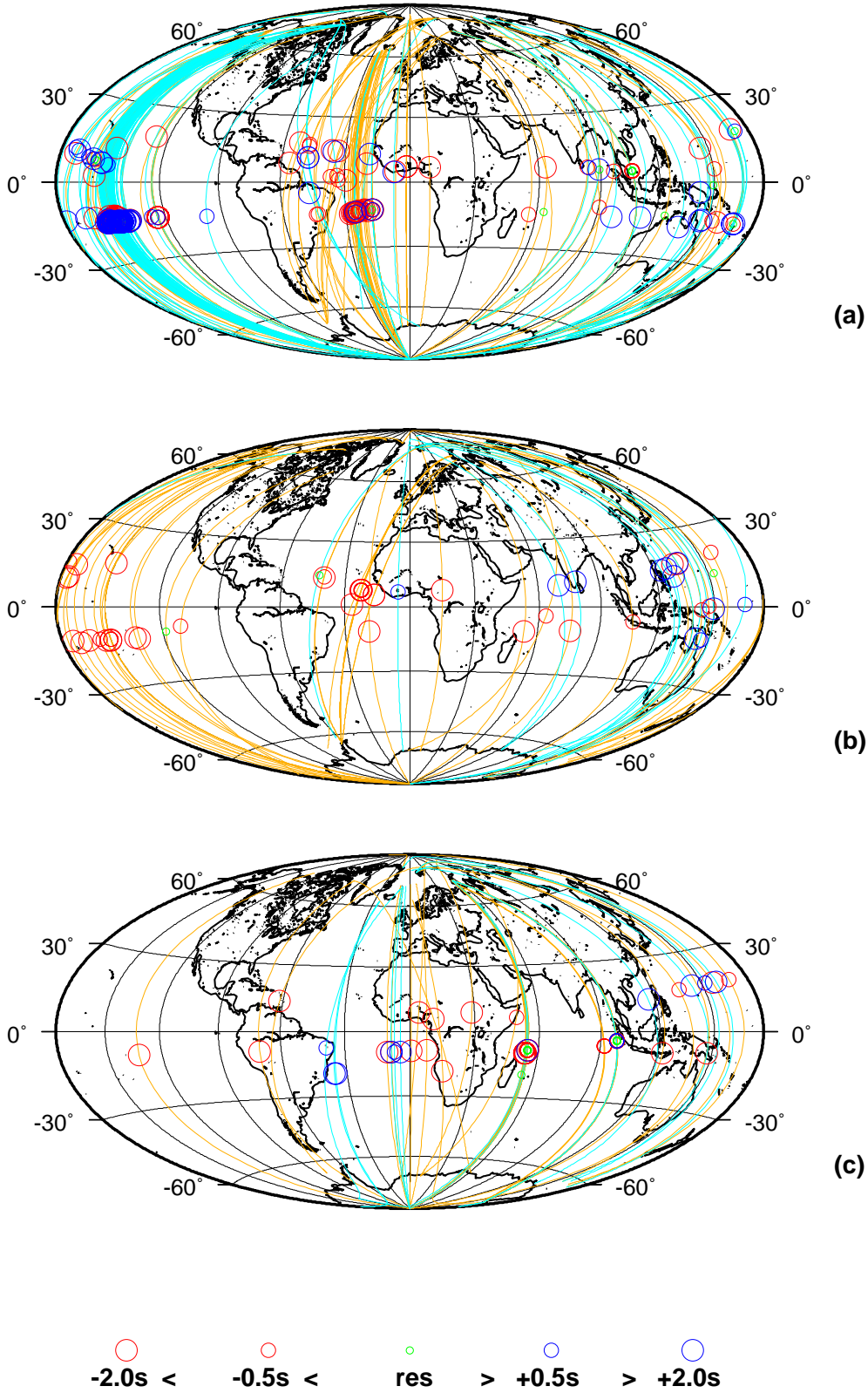


FIG. 4.18 – Trajets très polaires  $\xi < 15^\circ$  pour trois gammes de distances épicentrales : (a)  $150^\circ - 155^\circ$ , (b)  $155^\circ - 160^\circ$ , (c)  $160^\circ - 165^\circ$ . L'amplitude des résidus est représentée par un cercle au niveau du point milieu du rai.

On peut s’interroger sur l’origine de ces anomalies : problèmes d’horloge de la station, contributions des structures au voisinage de la source ou du récepteur,...

Par contre, les anomalies polaires dans la gamme épacentrale  $155^\circ - 165^\circ$  dans les courbes  $\delta T(\xi)$  ne semble pas être associées à une crise sismique particulière (Figure 4.18b et 4.18c). Elles sont en grande partie imputables à la construction des rais géométriques avec très peu de données et à l’existence de ces résidus fortement positifs. La table 4.5 résume le calcul des rais résumés géométriques dans cette gamme de distance épacentrale et pour les trajets les plus polaires.

Distance épacentrale	$\xi$ (deg)	$\Phi$ (deg)	Résidus (s)	Ecart-type (s)	Nombre de trajets
$155^\circ - 160^\circ$	15.0	-160.0	-2.385	0.276	14
	15.0	-40.0	-2.025	0.340	11
	15.0	120.0	+0.550	1.662	7
	15.0	160.0	+0.754	0.578	5
$160^\circ - 165^\circ$	15.0	80.0	-1.013	0.150	22
	15.0	160.0	+0.918	2.501	5

TAB. 4.5 – Rais résumés géographiques très polaires dans deux gammes de distances épacentrales.

Pour des distances supérieures à  $165^\circ$ , la tendance est différente (Ishii et Dziewonski, 2002, 2003) : une direction lente apparaît autour de  $\xi = 50^\circ$ . Il est encourageant de voir que malgré des corrections calculées dans un modèle de manteau récent et avec deux méthodes différentes pour moyenner les trajets, cette tendance est toujours observée. Il existe donc un changement de l’anisotropie de la graine en profondeur. Cette variation de l’anisotropie a été associée par Ishii et Dziewonski (2002) à l’existence d’une sous-graine.

D’après Ishii et Dziewonski (2003), cette direction apparente est engendrée par une forte augmentation de l’anisotropie dans la graine avec un axe de symétrie parallèle à l’axe de rotation de la Terre. Nous démontrerons dans les paragraphes suivants que ces données peuvent être aussi bien expliquées par une anisotropie forte ou faible et un axe de symétrie lent ou rapide dans la sous-graine.

## 4.3 Formulation du problème inverse

Dans cette section, nous décrivons la formulation du problème inverse linéaire que nous avons utilisé pour inverser la structure anisotrope de la graine.

### 4.3.1 Le problème inverse

Le problème direct consiste à prédire la valeurs des données  $\mathbf{d}_{\text{cal}}$  à partir de la connaissance des lois physiques décrivant le système étudié que l'on représente par un modèle  $\mathbf{m}$ . Cette prédiction est décrite par la relation :

$$\mathbf{d}_{\text{cal}} = g(\mathbf{m}) \quad (4.5)$$

$g$  traduit la relation entre les données et le modèle. Elle peut être linéaire ou pas. Dans le cas de la propagation des ondes, le temps de propagation  $T$  est fonction de la vitesse de phase  $v(r)$  des ondes dans le milieu :

$$T = \int_S \frac{dr}{v(r)} \quad (4.6)$$

avec  $S$  le trajet du rai. La perturbation du temps de propagation par rapport à un modèle de référence s'écrit :

$$\delta T = T - T^0 = \int_S \frac{dr}{v(r)} - \int_{S^0} \frac{dr}{v^0(r)} \quad (4.7)$$

D'après le principe de Fermat, le temps de propagation du rai est stationnaire pour une petite perturbation de la trajectoire du rai :

$$\delta T = - \int_{S^0} \frac{\delta v(r)}{v^0(r)^2} dr \quad (4.8)$$

Cette équation exprime la relation linéaire entre la perturbation du temps de propagation observé et la perturbation du modèle de vitesse par rapport à un modèle de référence.

Cette modélisation des données constitue le problème direct. L'objectif du problème inverse est de reconstruire le modèle à partir d'un jeu de données. La relation entre le problème direct et le problème inverse est représentée par la figure 4.19 : on obtient les données correspondant à un modèle par la modélisation, et réciproquement, on obtient le modèle par l'inversion des données.

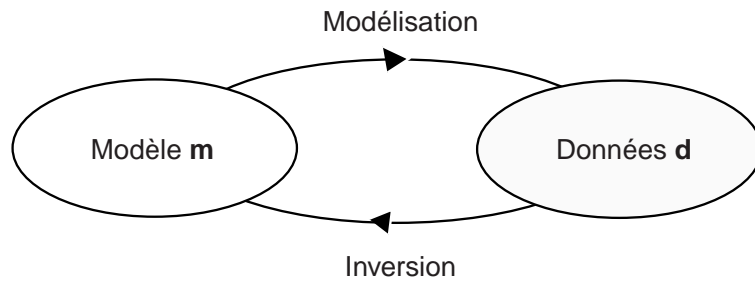


FIG. 4.19 – Représentation classique des problèmes direct et inverse (d'après Scales et Snieder (2000)).

Cependant la résolution du problème inverse n'est pas toujours évidente. Il faut pouvoir décrire correctement la relation entre données et modèle. De plus, si la solution existe, elle n'est pas forcément unique. Enfin, il se pose le problème de la propagation des erreurs. En effet, les données réelles sont généralement contaminées par des erreurs de mesures, et les théories utilisent souvent des approximations (dans le cas de la perturbation du temps de propagation, on a effectué un développement à l'ordre 1). Il est alors nécessaire de prendre en compte toutes les incertitudes dans l'estimation du modèle. On ne cherche donc plus les modèles qui décrivent exactement les données, mais les modèles qui les décrivent "au mieux". Il faut donc se donner des critères pour ensuite apprécier les modèles estimés  $\tilde{\mathbf{m}}$ . Le problème inverse est décrit comme la combinaison de deux étapes : l'estimation et l'appréciation (figure 4.20).

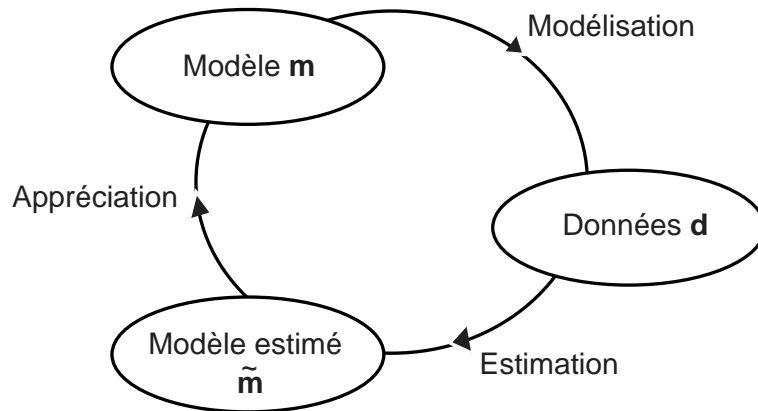


FIG. 4.20 – Représentation du problème inverse comme une combinaison d'un problème d'estimation et d'un problème d'appréciation (d'après Scales et Snieder (2000)).

La première étape consiste à chercher l'ensemble des modèle  $\tilde{\mathbf{m}}$  qui approche le mieux le modèle "vrai", c'est-à-dire les modèles  $\tilde{\mathbf{m}}$  tels que la différence entre les données mesurées

et les données calculées soit minimale :

$$||\delta T_{obs} - \delta T(\tilde{\mathbf{m}})|| = \min ||\delta T_{obs} - \delta T(\mathbf{m})|| \quad (4.9)$$

avec  $\delta T_{obs}$  la perturbation des données observées et  $||.||$  une norme. Le choix de cette norme est délicat. En effet, en fonction du choix de la norme, l'influence sur la solution des données avec des erreurs importantes ou des points aberrants (outliers) peut être plus ou moins forte (Nolet, 1987) :

- norme  $l_n$  avec  $n > 2$ , forte dominance des points aberrants
- norme  $l_2$ , influence des outliers encore importante
- norme  $l_n$  avec  $1 < n < 2$ , diminution sensible de l'influence des outliers

Enfin, l'introduction d'un formalisme statistique permet de réaliser une appréciation du modèle estimé.

### 4.3.2 Solution des moindres carrés

La solution des moindres carrés correspond à une norme de type  $l_2$ . C'est une norme qu'on utilise généralement parce qu'elle permet une mise en oeuvre plus facile du problème inverse.

#### Erreurs sur les données

On introduit une fonction coût  $S(\mathbf{m})$  qui mesure l'écart entre les données observées et les données prédites. Le problème à résoudre est de trouver l'ensemble des paramètres  $\mathbf{m}$  qui minimisent la fonction :

$$S(\mathbf{m}) = ||\delta T_{obs} - \delta T(\mathbf{m})||^2 \quad (4.10)$$

Par la suite, nous considérerons toujours le problème inverse comme un problème discret et de taille finie. Ainsi, nous avons modélisé la structure radiale de la graine à l'aide de couches homogènes de 10 km d'épaisseur. La formulation du problème inverse avec la théorie des rais ou avec les noyaux de sensibilité se réduit à un système discret :

$$\mathbf{G.m} = \mathbf{d} \quad (4.11)$$

avec  $\mathbf{d}$  le vecteur contenant les résidus de temps de propagation et  $\mathbf{m}$  le vecteur contenant les paramètres anisotropes à chaque profondeur. Chaque ligne de  $\mathbf{G}$  contient un noyau 1D calculé à chaque profondeur :

$$\delta T = \sum_i \left[ \epsilon_i (K_\epsilon^{1-D})_i + \delta_i (K_\delta^{1-D})_i + a_{0i} (K_\alpha^{1-D})_i \right] \Delta r_i \quad (4.12)$$

Si on tient compte des erreurs sur les données, obtenues lors du traitement statistique des trajets en rais résumés, il peut pondérer le système (4.11). Pour cela, on introduit la matrice de covariance sur les données  $\mathbf{C}_d$  (diagonale). La solution des moindres carrés revient à minimiser :

$$\min(\mathbf{G}\mathbf{m} - \mathbf{d})^T \mathbf{C}_d^{-1} (\mathbf{G}\mathbf{m} - \mathbf{d}) \quad (4.13)$$

où l'exposant  $T$  signifie que l'on prend le transposé.

### Non-unicité de la solution

Le problème inverse est généralement mal posé, et la solution du problème est non-unique. L'étude du modèle de Ishii et Dziewonski (2003) dans les sections précédentes a montré la non-unicité probable de la solution du problème inverse : différentes familles de modèles présentant des caractéristiques bien distinctes (taille de la sous-graine, orientation de l'axe de symétrie dans cette sous-graine, ...) sont susceptibles d'expliquer les données observées. Il faut donc se donner des critères pour réduire l'espace des modèles. On introduit des valeurs a priori  $\mathbf{m}_{\text{prior}}$  du modèle  $\mathbf{m}$  et la matrice de covariance a priori correspondante  $\mathbf{C}_m$ . Cette information a priori pourra porter par exemple sur l'amplitude et le signe des perturbations du modèle. Au sens des moindres carrés, il s'agit alors de minimiser une fonction coût de la forme suivante :

$$S(\mathbf{m}) = [\mathbf{G}\mathbf{m} - \mathbf{d}]^T \mathbf{C}_d^{-1} [\mathbf{G}\mathbf{m} - \mathbf{d}] + [\mathbf{m} - \mathbf{m}_{\text{prior}}]^T \mathbf{C}_m^{-1} [\mathbf{m} - \mathbf{m}_{\text{prior}}] \quad (4.14)$$

Le premier terme  $[\mathbf{G}\mathbf{m} - \mathbf{d}]^T \mathbf{C}_d^{-1} [\mathbf{G}\mathbf{m} - \mathbf{d}]$  mesure, dans l'espace des données, l'écart entre l'observation et la prédiction, tandis que le second terme  $[\mathbf{m} - \mathbf{m}_{\text{prior}}]^T \mathbf{C}_m^{-1} [\mathbf{m} - \mathbf{m}_{\text{prior}}]$  mesure dans l'espace des modèles l'écart entre un modèle donné et un modèle de référence. Il faut trouver un compromis entre la taille de l'espace des modèles et la capacité du modèle à décrire correctement les données. La régularisation permet de réduire la taille de l'espace des données et des modèles, c'est-à-dire de choisir une solution parmi plusieurs possibilités.

### Résolution du problème

Si la solution du problème correspond au minimum de la fonction coût  $S(\mathbf{m})$ , il faut chercher les zéros de la dérivée de (4.14) par rapport au modèle  $\mathbf{m}$ . Le problème linéaire à résoudre est donc (Nolet, 1987) :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C}_d^{-1/2} \mathbf{G} \\ \mathbf{C}_m^{-1/2} \end{pmatrix} \mathbf{m} = \mathbf{A} \mathbf{m} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_d^{-1/2} \mathbf{d} \\ \mathbf{C}_m^{-1/2} \mathbf{m}_{\text{prior}} \end{pmatrix} \quad (4.15)$$



Le minimum de la fonction coût (4.14) est donné par

$$\mathbf{m} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \begin{pmatrix} \mathbf{C}_d^{-1/2} \mathbf{d} \\ \mathbf{C}_m^{-1/2} \mathbf{m}_{\text{prior}} \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

On peut déterminer  $\mathbf{m}$  par décomposition en valeurs singulières (SVD).

Il est important de pouvoir décrire la confiance que l'on a dans la solution du problème. L'analyse des incertitudes permet d'estimer les composantes du modèle qui sont bien ou mal déterminées. Dans l'approche des moindres carrés, le développement d'un formalisme statistique permet l'estimation des intervalles de confiance sur les paramètres du modèle estimé et sur les données prédites (Tarantola, 1987). On peut ainsi calculer la matrice de covariance a posteriori sur le modèle et les données  $\mathbf{C}'_m = [\mathbf{A}^T \mathbf{A}]^{-1}$  et  $\mathbf{C}'_d = [\mathbf{G} \mathbf{C}'_m \mathbf{G}^T]$  qui nous donnent les barres d'erreur. Les incertitudes sur le modèle final sont dues à la résolution imparfaite et à la propagation des erreurs sur les données. Si l'information a priori sur le modèle a une distribution gaussienne, de même que les données, alors la covariance a posteriori a aussi une distribution gaussienne. Cependant l'estimation des erreurs basée sur une statistique gaussienne est souvent optimiste (Trampert, 1998).

## 4.4 Facteurs influençant les résultats de l'inversion

Dans cette section, nous examinons tous les effets qui peuvent affecter le résultat de l'inversion. Nous allons voir que le choix de la paramétrisation et le moyennage en distance épacentrale jouent un rôle prépondérant dans les inversions quand il s'agit de comparer les modèles obtenus par la théorie des noyaux de sensibilité et par la théorie des rais. Par ailleurs, le traitement statistique des données en différents types de rais résumés peut conduire à des modèles différents. Enfin, la régularisation introduite de façon explicite via  $\mathbf{C}_m$  conduit à trois familles distinctes de modèles.

### 4.4.1 Effets de la paramétrisation

#### Projection sur une base de fonctions radiales

On peut choisir de décomposer un modèle radial sur une base de fonctions variant avec la profondeur. Dans ce cas, le vecteur modèle  $\mathbf{m}$  est une combinaison linéaire de ces fonctions :

$$\mathbf{m} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{m}' \quad (4.17)$$

avec  $\mathbf{m}'$  le vecteur qui contient les coefficients de la décomposition de  $\mathbf{m}$  sur la base de fonctions. Chaque colonne de  $\mathbf{B}$  contient les variations de ces fonctions avec la profondeur. La décomposition en valeur singulière donne alors en sortie la matrice de covariance  $\mathbf{C}'_{\mathbf{m}'}$  a posteriori sur les coefficients  $\mathbf{m}'$ . Cette matrice est fonction de  $\mathbf{C}'_{\mathbf{m}}$  d'après le principe de la propagation de la variance :  $\mathbf{C}'_{\mathbf{m}} = [\mathbf{B} \mathbf{C}'_{\mathbf{m}'} \mathbf{B}^T]$ . Après décomposition dans cette base, le système à résoudre est :

$$\mathbf{m}' = (\mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \begin{pmatrix} \mathbf{C}_d^{-1/2} \mathbf{d} \\ \mathbf{C}_m^{-1/2} \mathbf{m}_{\text{prior}} \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

La régularisation intervient de façon implicite avec le choix de la base de fonction et du nombre d'éléments dans cette base (Trampert, 1998), et de façon explicite avec l'introduction de  $\mathbf{C}_m$ .

Différentes bases de fonctions radiales ont été utilisées pour l'étude de la graine : des couches homogènes (Su et Dziewonski, 1995; Ishii et Dziewonski, 2003), des splines (Tromp, 1993, 1995; McSweeney et al., 1997; Beghein et Trampert, 2003), des polynômes pairs (Ishii et al., 2002b). Nous choisirons une paramétrisation du modèle avec des polynômes pairs du type  $1, x^2, x^4, \dots, x^{2n}$ , où  $x = r/R_{ICB}$  est le rayon normalisé.

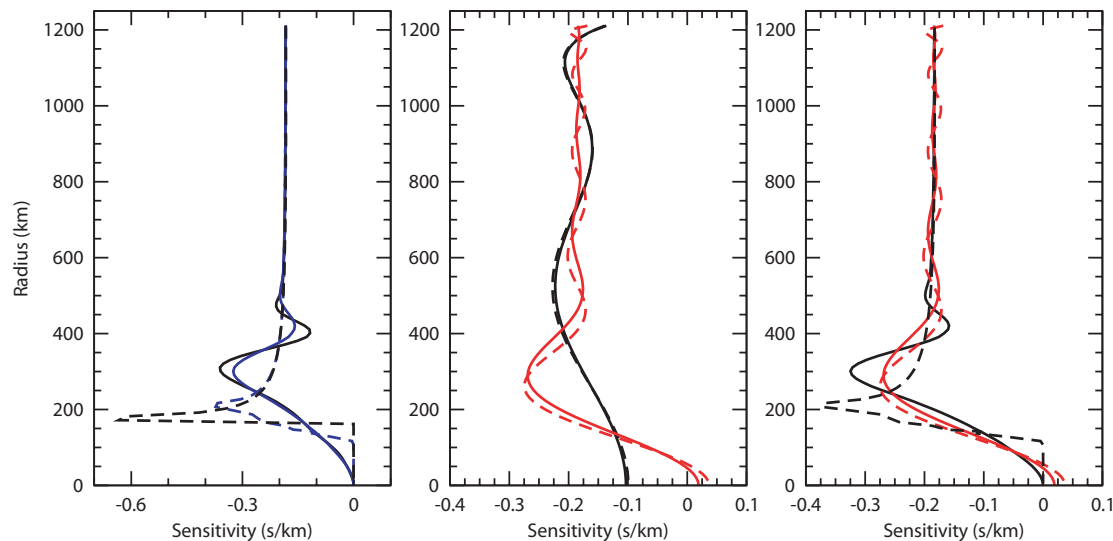


FIG. 4.21 – Noyaux de sensibilité 1-D à fréquence finie (lignes solides) et pour les rais géométriques (lignes en pointillés). Gauche : Comparaison entre les noyaux pour la distance épacentrale moyenne (noir) et les noyaux moyens (bleu). Milieu : Noyaux projetés sur une base de 5 polynômes (noir) et de 11 polynômes (rouge). Droite : Comparaison entre les noyaux moyens (noirs) et les noyaux projetés (rouge).

Afin d'obtenir les variations en profondeurs de l'anisotropie de la graine, les données ont été classées en gammes de  $3^\circ$  en distance épacentrale ce qui correspond à des couches d'environ 100 km d'épaisseur (en effet, la variation de la profondeur du point bas du rai en fonction de la distance épacentrale est quasiment linéaire comme on peut le voir sur la figure 4.1). Ainsi, la figure 4.21a montre les noyaux 1-D en fréquence finie (lignes solides) et les noyaux géométriques 1-D (lignes en pointillés). Nous avons représenté le noyau pour la distance épacentrale moyenne et la moyenne des noyaux dans la gamme  $174^\circ - 177^\circ$ . Le noyau moyen tient compte de la distribution des données dans la gamme de distances considérées. Ce moyennage réduit sensiblement les différences entre les noyaux obtenus pour les deux théories. Pour paramétriser les variations des perturbations anisotropes en fonction de la profondeur, nous avons utilisé une base de fonctions radiales. La figure 4.21b compare les noyaux moyens avant et après projection sur une base de 5 (noir) et 11 (rouge) polynômes. Afin de décrire plus précisément la structure des noyaux, il faut augmenter le nombre de polynômes. Par la suite, nous avons utilisé 11 polynômes dans toutes les inversions. Cependant, une conséquence importante de la paramétrisation en polynômes est la réduction significative des différences entre les deux théories (figure 4.21c).

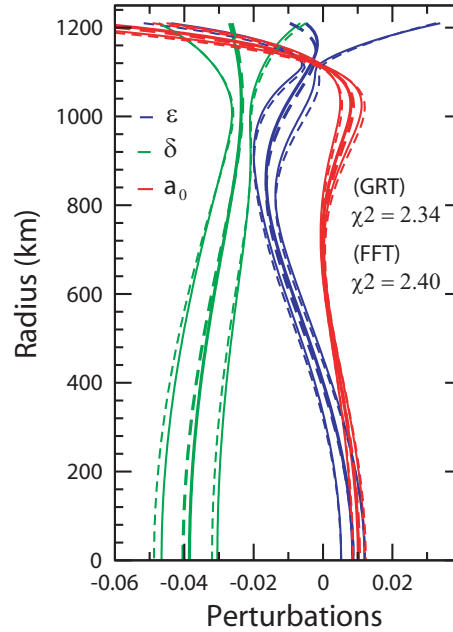


FIG. 4.22 – Inversion des rais résumés géographiques : comparaison entre les résultats obtenus avec les noyaux de sensibilité (ligne solide) et la théorie des rais (pointillés).  $\epsilon$  (bleu),  $\delta$  (vert),  $a_0$  (rouge). Les intervalles de confiance sont donnés pour  $1\sigma$ .

Ainsi, le travail statistique sur les données, avec le moyennage en distances épicen-

trales et la construction de rais résumés a tendance à diminuer la sensibilité aux petites structures qui auraient pu être résolues par les noyaux de sensibilité. D'autre part, une paramétrisation grossière diminue fortement les améliorations que pourraient apporter les noyaux de sensibilité. La figure 4.22 montre les modèles obtenus à partir de rais résumés géographiques pour les deux théories, et sans introduire d'information a priori. La décomposition en valeurs singulières de la matrice  $\mathbf{AB}$  a été tronquée afin d'éliminer la contribution des valeurs propres proches de zéro à la solution (figure 4.23).

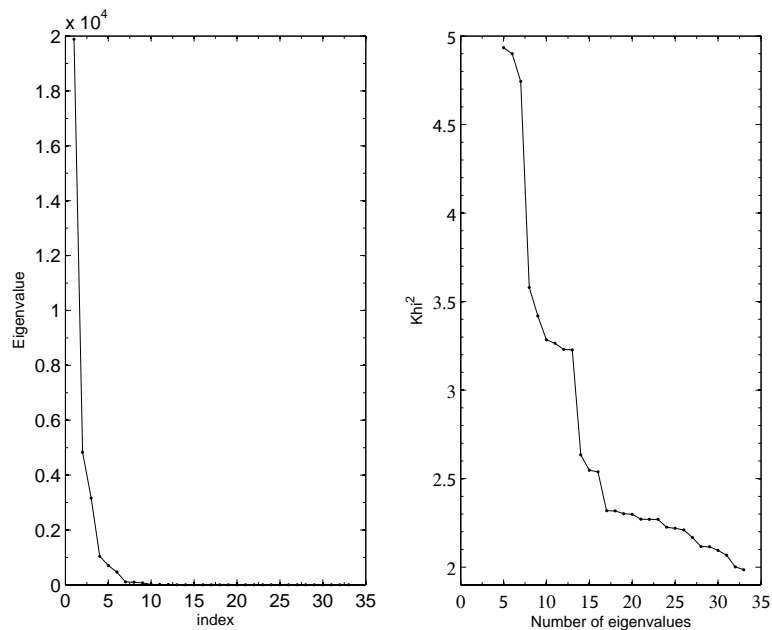


FIG. 4.23 – Spectre des valeurs propres de la matrice  $\mathbf{AB}$  après projection du modèle sur une base de 11 polynômes : (a) Spectre obtenu pour l'inversion des rais résumés géographiques, (b) Variations de la valeur de  $\chi^2$  en fonction du nombre de valeurs propres conservées.

En effet, on observe que seulement les structures anisotropes correspondant à 4-5 polynômes sont résolues (associés aux 12-15 premières valeurs propres). Une inversion utilisant seulement 5 polynômes donne des résultats très similaires (si on exclut le sommet de la graine qui n'est pas correctement échantillonné par le jeu de données) à ceux d'une inversion avec 8 ou 15 polynômes (figure 4.24). On constate bien sûr que plus on augmente le nombre de paramètres (le nombre de polynômes), plus on diminue la valeur du  $\chi^2$ . Par contre, la troncature du spectre induit une diminution de la résolution.

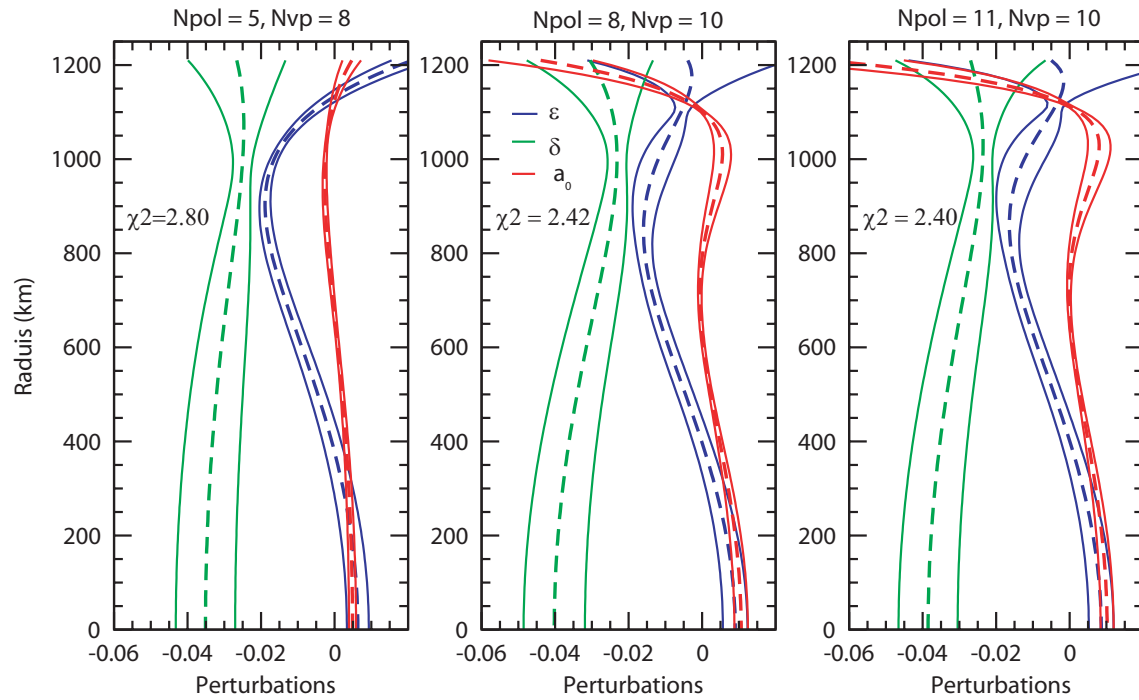


FIG. 4.24 – Résultats des inversions obtenus pour trois bases de fonctions radiales : (a) 5 polynômes, (b) 8 polynômes et (c) 11 polynômes.

En conclusion, les projections des noyaux à fréquence finie et géométrique sur cette base de polynômes de bas degrés sont pratiquement identiques. La faible résolution des données explique pourquoi on n'observe pas de différences significatives entre les modèles obtenus à partir des deux théories. Dans les sections suivantes, nous ne présenterons désormais que les résultats des inversions avec les noyaux de sensibilité.

D'autre part, la figure 4.22 montre que l'absence de données dans la gamme de distances épicentrales  $120^\circ - 150^\circ$  induit d'importantes incertitudes pour  $\epsilon$ ,  $\delta$ ,  $a_0$  dans la partie supérieure de la graine  $r > 1000$  km. À petite distance épicentrale, les résidus peuvent être contaminés par des ondes PKP(BC) diffractées à l'ICB. Donc, en toute rigueur, il faudrait tenir compte des phases diffractées lors de la construction des noyaux de sensibilité. Pour l'instant ces noyaux ont été construits dans le cadre de la théorie WKBJ (ou approximation des rais) avec laquelle on ne peut pas modéliser l'amplitude des ondes diffractées. Nous avons donc choisi de ne pas considérer les courtes distances épicentrales comprises entre  $120^\circ$  et  $150^\circ$  afin de pouvoir utiliser plus proprement les noyaux de sensibilité. Cependant, pour ces distances, les ondes n'ont pas une sensibilité significative aux structures situées à un rayon inférieur à 1000 km (voir figure 4.1). Ainsi l'absence de données avec un point bas situé dans les couches superficielles de la graine n'affecte pas

le résultat de l'inversion à plus grande profondeur (pour plus de détail voir section 4.4.4).

### Influence de la définition de la perturbation de vitesse isotrope

Dans le chapitre 2, nous avons évoqué l'ambiguïté existant dans le choix de la vitesse de référence et donc de la définition de la perturbation isotrope de la vitesse d'onde P. Nous allons illustrer dans ce paragraphe les effets de corrélation entre les paramètres consécutifs au choix de cette référence. La figure 4.25 montre les corrélations entre les paramètres  $\epsilon$ ,  $\delta$  et  $a_0$  en fonction de la définition de  $\delta\alpha$ .

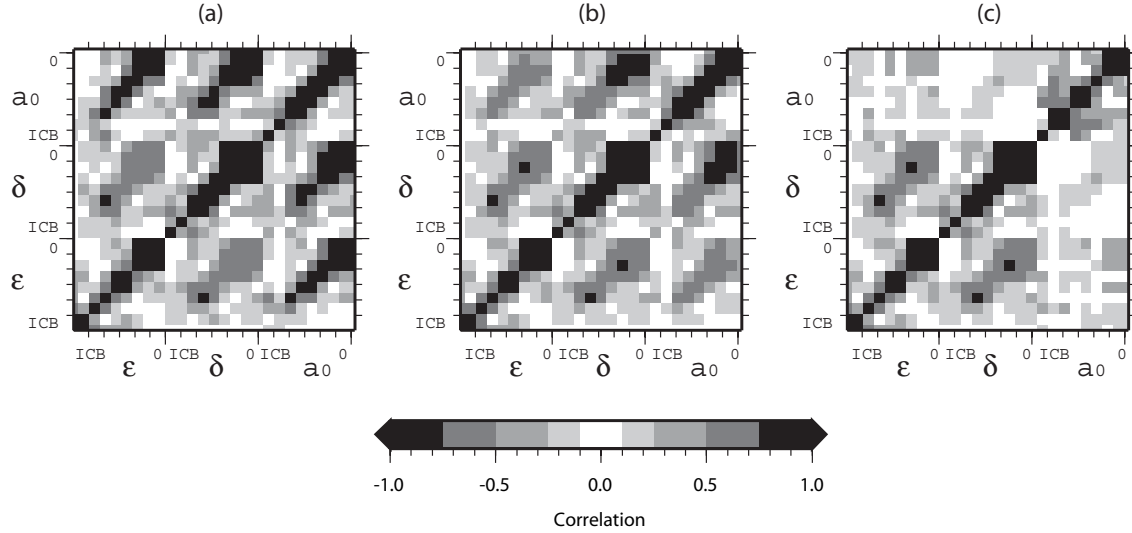


FIG. 4.25 – Matrice de corrélation obtenues pour trois inversion utilisant trois paramétrisations différentes de la perturbation du tenseur élastique : (a) avec  $\epsilon$ ,  $\delta$  et  $\delta\alpha = (C_{33} - C_{11}^0)/2\rho\alpha$ , (b)  $\epsilon$ ,  $\delta$  et  $\delta\alpha = (C_{33}/2 + C_{11}/2 - C_{11}^0)/2\rho\alpha$ , (c)  $\epsilon$ ,  $\delta$  et  $\delta\alpha = (C_{11} - C_{11}^0)/2\rho\alpha$ .  $C_{ij}^0$  correspond au tenseur élastique du milieu de référence isotrope et  $C_{ij}$  au tenseur élastique du milieu anisotrope.

Nous examinerons trois cas :

- la perturbation de vitesse isotrope est la différence entre la vitesse polaire dans le milieu anisotrope et la vitesse dans un milieu de référence isotrope (cas a)

$$\delta\alpha = (C_{33} - C_{11}^0)/2\rho\alpha \quad (4.19)$$

- la perturbation de vitesse isotrope est la différence entre la moyenne de la vitesse polaire et équatoriale dans le milieu anisotrope et la vitesse dans le milieu de référence isotrope (cas b)

$$\delta\alpha = ((C_{11} + C_{33})/2 - C_{11}^0)/2\rho\alpha \quad (4.20)$$

- la perturbation de vitesse isotrope est la différence entre la vitesse équatoriale dans le milieu anisotrope et la vitesse dans le milieu de référence isotrope (cas c)

$$\delta\alpha = (C_{11} - C_{11}^0)/2\rho\alpha \quad (4.21)$$

Dans le cas (a), le choix de cette paramétrisation introduit un terme isotrope dans la matrice de scattering de  $\epsilon$  qui s'écrit alors

$$\tilde{\mathbf{S}}_a^\epsilon = \tilde{\mathbf{S}}^\epsilon + \tilde{\mathbf{S}}^\alpha \quad (4.22)$$

Il en résulte une forte corrélation entre  $\epsilon$  et  $a_0$ . D'autre part, le changement d'anisotropie en profondeur induit une corrélation entre  $\delta$  et  $\epsilon$  et par conséquent entre  $\delta$  et  $a_0$ . Ces corrélations sont sensiblement plus faibles dans le cas (b), où on a introduit le terme isotrope dans la matrice de scattering associée à  $\epsilon$  :

$$\tilde{\mathbf{S}}_b^\epsilon = \tilde{\mathbf{S}}^\epsilon + \frac{1}{2}i \, thbf{\tilde{S}}^\alpha \quad (4.23)$$

Enfin dans le cas (c), correspondant à celui traité dans le chapitre 2, la matrice  $\tilde{\mathbf{S}}^\epsilon$  ne contenant que des contributions anisotropes, il n'y a pratiquement aucune corrélation entre  $\epsilon$  et  $a_0$  et donc entre  $\delta$  et  $a_0$ .

Ainsi, nous avons toujours choisi de définir la perturbation de vitesse dans le plan équatorial. D'autre part, la valeur du  $\chi^2$  est plus forte pour les inversions avec  $\delta\alpha = (C_{33} - C_{11}^0)/2\rho\alpha$  que pour les inversions avec  $\delta\alpha = (C_{11} - C_{11}^0)/2\rho\alpha$ .

$\delta\alpha$	$\chi^2$
$(C_{11} - C_{11}^0)/2\rho\alpha$	2.27
$((C_{11} + C_{33})/2 - C_{11}^0)/2\rho\alpha$	2.33
$(C_{33} - C_{11}^0)/2\rho\alpha$	2.37

#### 4.4.2 Effets du stacking en rais résumés

La figure 4.26 illustre l'effet de la méthode utilisée pour construire les rais résumés sur les résultats de l'inversion. Le modèle (a) a été obtenu à partir de l'inversion des rais résumés géographiques tandis que le modèle (b) a été obtenu à partir des rais résumés géométriques. On observe une différence significative dans les variations en profondeur de  $\epsilon$  et  $\delta$  (pour des rayons inférieurs à 1000 km). Dans le modèle (a),  $\epsilon$  varie de -0.02 pour un rayon de 1000 km à +0.01 au centre de la graine tandis que dans le modèle (b)  $\epsilon$  est quasiment constant pour  $r < 1000$  km avec une amplitude de -0.02.  $|\delta|$  est pratiquement

constant en profondeur dans le modèle (a) tandis qu'il augmente fortement dans le modèle (b). Ainsi, on trouve deux familles de modèles à partir des deux jeux de données. De plus, on constate que l'inversion des rais géométriques est caractérisée par des  $\chi^2$  plus forts que celle des rais géographiques.

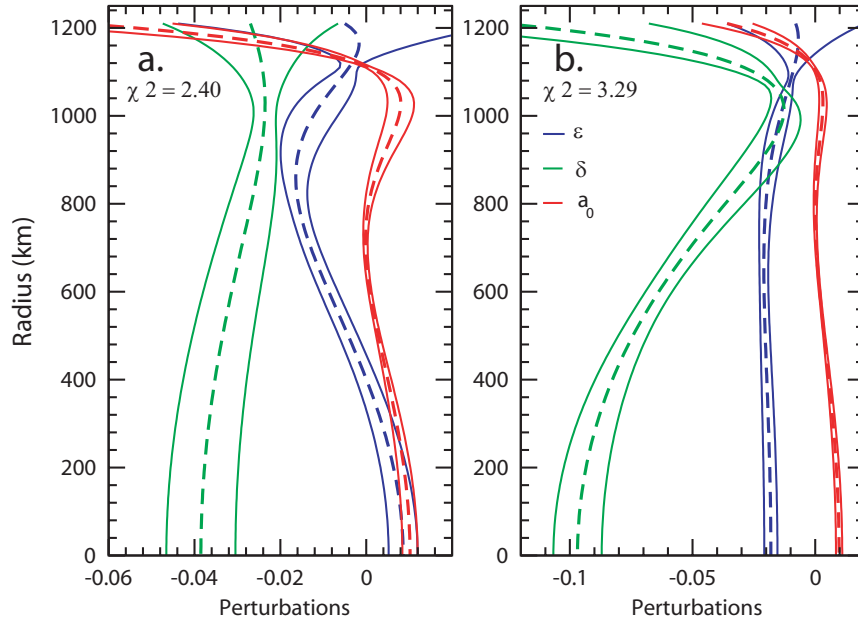


FIG. 4.26 – Comparaison des modèles obtenus dans le cadre de la théorie des noyaux de sensibilité pour une période dominante de 2 s à partir de l'inversion des rais géographiques (a) et géométriques (b) :  $\epsilon$  (bleu),  $\delta$  (vert) et  $a_0$  (rouge). Les deux inversions ont été obtenues pour le même nombre de polynômes et sans introduction d'informations a priori. Les intervalles de confiance (lignes solides) sont donnés pour  $1\sigma$ .

#### 4.4.3 Effets de l'information a priori

Examinons maintenant l'effet de l'information a priori sur les résultats de l'inversion. La figure 4.27 montre les modèles obtenus avec les rais géographiques (a) et avec les rais géométriques (b), inversés dans le cadre de la théorie des noyaux de sensibilité, pour différents a priori sur l'amplitude et le signe des perturbations :

- (1) le signe des perturbations  $\epsilon$ ,  $\delta$  et  $a_0$  est laissé libre
- (2) le signe de  $\epsilon$  est libre mais on impose  $\delta < 0$  comme c'est le cas dans beaucoup de modèles de graine
- (3) on impose  $\epsilon < 0$ , correspondant à un axe rapide parallèle à l'axe de rotation dans toute la graine, et  $\delta < 0$



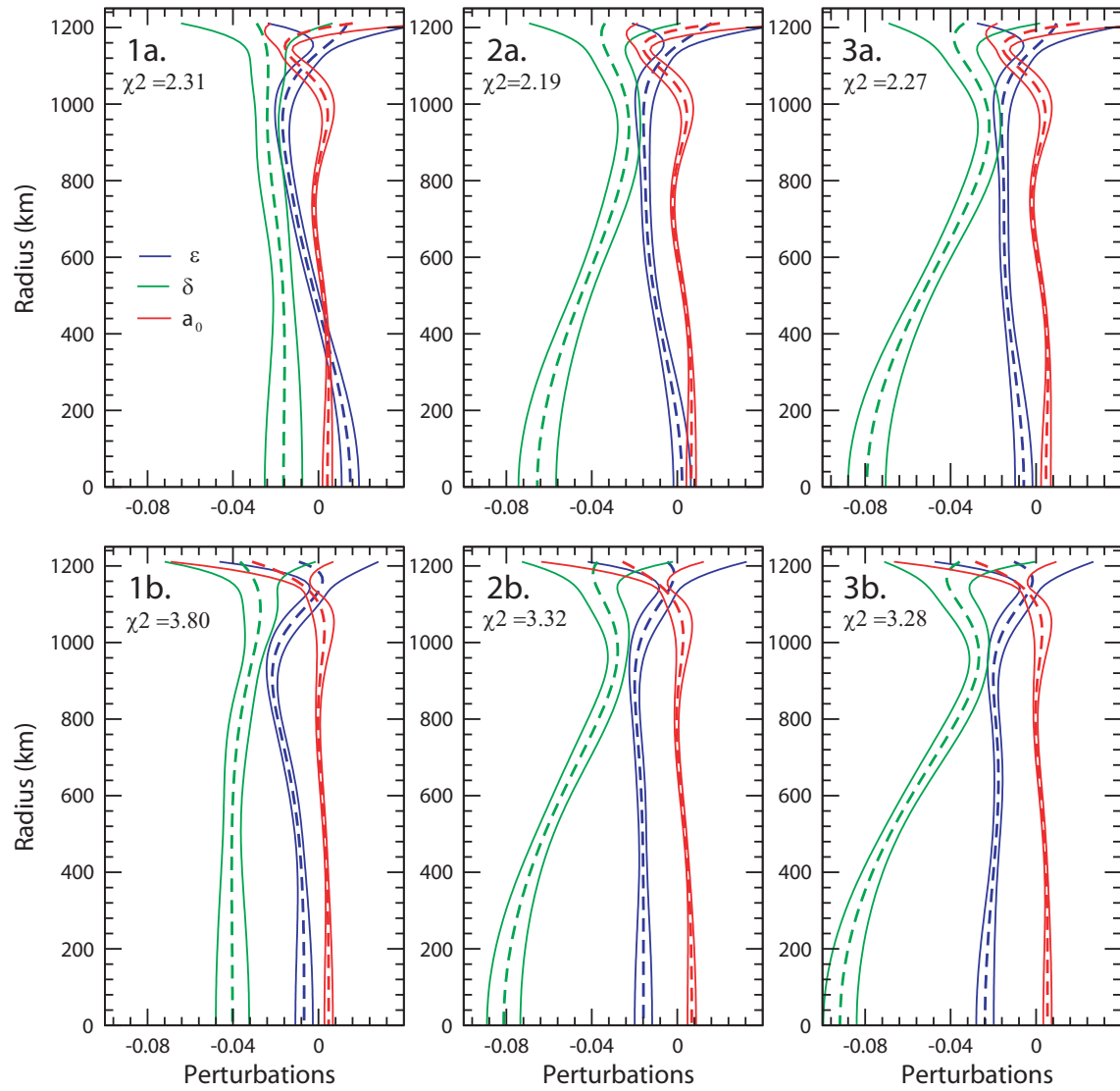


FIG. 4.27 – Modèles de graine anisotrope obtenus à partir de l'inversion des rais résumés géographiques (a) et géométriques (b) en utilisant les noyaux de sensibilité :  $\epsilon$  (bleu),  $\delta$  (vert) et  $a_0$  (rouge). Trois types d'information a priori sont explorés, avec des contraintes croissantes sur le signe des perturbations : le signe des trois perturbations est libre (1), on impose  $\delta$  négatif (2), on impose  $\epsilon$  et  $\delta$  négatifs (3).

Comme nous l'avons déjà mentionné, la partie supérieure de la graine ( $r > 1000$  km) est mal contrainte à cause du manque de données. Cependant, on observe que l'introduction de l'a priori stabilise les inversions. Pour les mêmes contraintes, les profils anisotropes sont différents pour les deux jeux de données. Pour un même jeu de données, les profils anisotropes varient avec l'information a priori. Généralement, il n'y a pas de variations significatives du  $\chi^2$  avec l'a priori lors de l'inversion des rais géographiques contrairement

à l'inversion des rais géométriques.

D'un modèle à l'autre, on n'observe pas de différences significatives dans le profil de  $a_0$ .  $\delta$  est toujours négatif tandis que  $\epsilon$  peut changer de signe en profondeur. Par contre, dès qu'on impose  $\delta < 0$ ,  $|\delta|$  augmente significativement avec la profondeur et  $\epsilon$  ne change plus de signe en profondeur.

Ainsi, pour les rais géographiques,  $\epsilon$  est négatif si  $r > 600$  km et devient positif pour un rayon compris entre 400 et 600 km quand le signe de toutes les perturbations est libre (cas 1a). Par contre, pour les rais géométriques,  $\epsilon$  est négatif mais  $|\epsilon|$  décroît en profondeur (cas 1b). Si on impose  $\delta > 0$  (cas 2a, 2b, 3a, 3b), alors  $|\delta|$  augmente en profondeur quel que soit le type de rais résumés. Si on augmente les contraintes,  $\epsilon$  tend vers une valeur nulle au centre de la graine dans le cas du stack géographique, mais demeure constant et négatif dans le cas du stack géométrique. La table ci-dessous résume l'ensemble des observations sur les paramètres anisotropes.

A PRIORI	rais géographiques	rais géométriques
(1) $\epsilon, \delta, a_0$ libres	$\epsilon > 0$ si $r < 500$ km $\delta < 0$ $ \delta $ diminue légèrement au centre	$ \epsilon  \rightarrow 0$ par valeur négative en $r=0$ $\delta < 0$ constant
(2) $\epsilon$ et $a_0$ libres et $\delta < 0$	$\epsilon \rightarrow 0$ par valeur négative au centre $\delta < 0$ augmente $ \delta $ augmente au centre	$\epsilon < 0$ et constant $\delta < 0$ $ \delta $ augmente au centre
(3) $\delta < 0$ et $\epsilon < 0$ $a_0$ libre	$\epsilon \rightarrow 0$ par valeur négative au centre $\delta < 0$ $ \delta $ augmente au centre	$\epsilon < 0$ et constant $\delta < 0$ $ \delta $ augmente au centre

TAB. 4.6 – Comportement de  $\epsilon$  et  $\delta$  avec la profondeur en fonction de l'a priori et du type de rais résumés utilisés pour l'inversion.

En conclusion, on peut dire que les informations a priori introduites dans l'inversion et la méthode pour construire les rais résumés conduisent à trois familles de modèles

- Modèle I : avec un changement du signe de  $\epsilon$  au centre de la graine (cas 1a)
- Modèle II : un taux d'anisotropie pratiquement nul dans la partie centrale de la graine accompagnée d'une augmentation de  $|\delta|$  (cas 2a, 3a, 1b)
- Modèle III : une anisotropie constante voire en légère augmentation dans la partie centrale de la graine avec une forte augmentation de  $|\delta|$  (cas 2b, 3b).

#### 4.4.4 Effets de la distribution des données en distance épacentrale et en $\xi$

La couverture en distance épacentrale et en  $\xi$  n'est pas suffisante pour contraindre correctement toute la structure radiale de la graine. Dans ce paragraphe, nous allons tester les effets de l'absence de données à courte distance épacentrale sur les inversions dans le cadre de la théorie des rais. Pour cela, nous avons créé deux jeux de données calculées pour un modèle de graine synthétique qui présente une augmentation régulière de l'anisotropie dans la graine. Le résultat des inversions est représenté sur la figure 4.28.

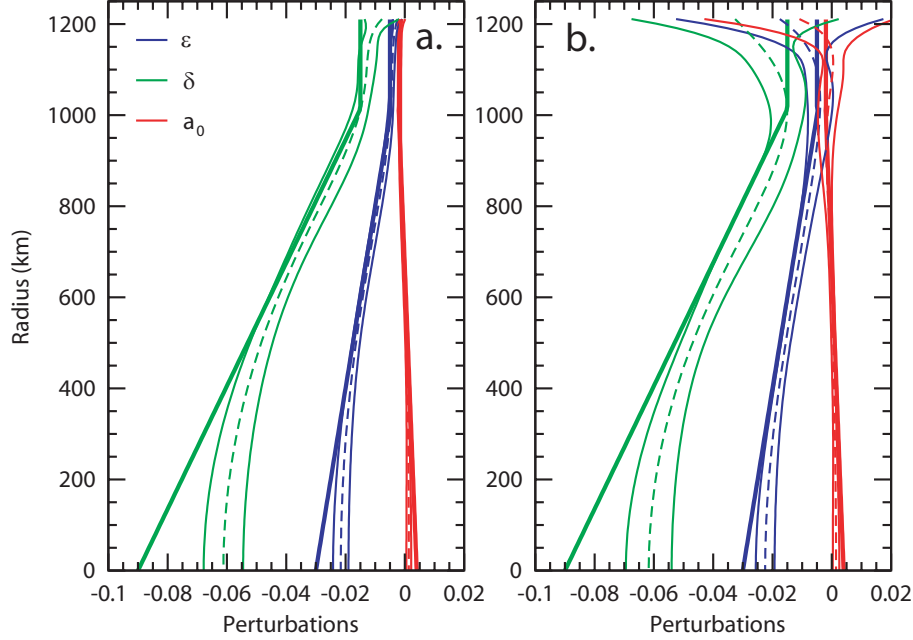


FIG. 4.28 – Effet de la distribution des données en  $\Delta$  et  $\xi$  Le modèle de départ est donné par les lignes épaisses :  $\epsilon$  (bleu),  $\delta$  (vert) et  $a_0$  (rouge). Deux cas sont considérés. (a) Entre  $150^\circ$  et  $180^\circ$ , on s'est donné une distribution  $(\Delta, \xi)$  identique à celle des données réelles, c'est-à-dire avec de moins en moins de données polaires quand la distance épacentrale augmente. On a également ajouté des données dans la gamme de distance  $120^\circ - 140^\circ$ . (b) Mêmes données que dans le cas (a) mais sans les courtes distances épacentrales.

Dans le cas (a), nous avons conservé les plus courtes distances épacentrales (entre  $120^\circ$  et  $140^\circ$ ) pour l'inversion avec une distribution homogène en distance épacentrale et en angle  $\xi$ . Pour  $\Delta > 150^\circ$ , nous avons conservé une distribution en  $\xi$  identique au jeu de données réelles : de moins en moins de données polaires quand la distance épacentrale augmente. On s'aperçoit que l'absence de ces données polaires entraîne une sous-estimation de  $\epsilon$  et  $\delta$

au centre de la graine. Les paramètres du modèle présentent des erreurs importantes au sommet de la graine si on n'a pas de données à courte distance épacentrale. Cependant, l'absence de ces données n'affecte pas les résultats des inversions en profondeur.

En conclusion, l'absence de données polaires à grande distance épacentrale entraîne une sous-estimation possible de l'anisotropie au centre de la graine.

## 4.5 Modèles radiaux

Nous allons maintenant examiner plus en détails un exemple de modèle appartenant à chacune des classes décrites précédemment, avec une paramétrisation polynômiale ou en deux couches homogènes.

### 4.5.1 Modèles lisses

La figure 4.29 montre un exemple de chacune des classes : 1a (modèle I), 2a (modèle II) et 3b (modèle III) (voir figure 4.27). Bien que ce dernier modèle correspond à une valeur plus forte du  $\chi^2$ , nous avons choisi de le conserver pour la discussion puisque c'est le modèle le plus proche de celui proposé par Ishii et Dziewonski (2003).

Le modèle représenté en Figure 4.29a, présente un changement de signe de  $\epsilon$  pour un rayon autour de  $R_{ic} \sim 500$  km.  $\epsilon$  varie de  $\sim -0.02$  au voisinage de l'ICB à  $\sim +0.02$  au centre. La direction rapide est donc parallèle à l'axe de rotation de la Terre dans la partie superficielle de la graine et bascule dans le plan de l'équateur dans sa partie centrale. Par ailleurs, le signe de  $\epsilon$  est toujours bien contraint en profondeur.  $\delta$  reste pratiquement constant de l'ICB à  $R_{ic}$  et diminue sensiblement (en valeur absolue) dans la partie centrale de la graine. C'est un modèle qui présente certaines similitudes avec celui obtenu par Beghein et Trampert (2003). Il présente également un changement du signe de  $\epsilon$  pour un rayon autour de 400 km.

Le second modèle (figure 4.29b) a été obtenu en imposant  $\delta < 0$ . Cette fois-ci, l'amplitude de  $\delta$  varie fortement avec la profondeur (de -0.02 à -0.07). Contrairement au modèle précédent, le taux d'anisotropie passe de 2% avec un axe rapide parallèle à l'axe de rotation de la Terre à un taux d'anisotropie pratiquement nul au centre.

Le dernier modèle (figure 4.29c) est obtenu par l'inversion des rais géométriques. On observe que le taux d'anisotropie est à peu près constant ( $\sim -0.02$ ) dans toute la graine.  $\delta$  décroît avec la profondeur de -0.03 à -0.09.

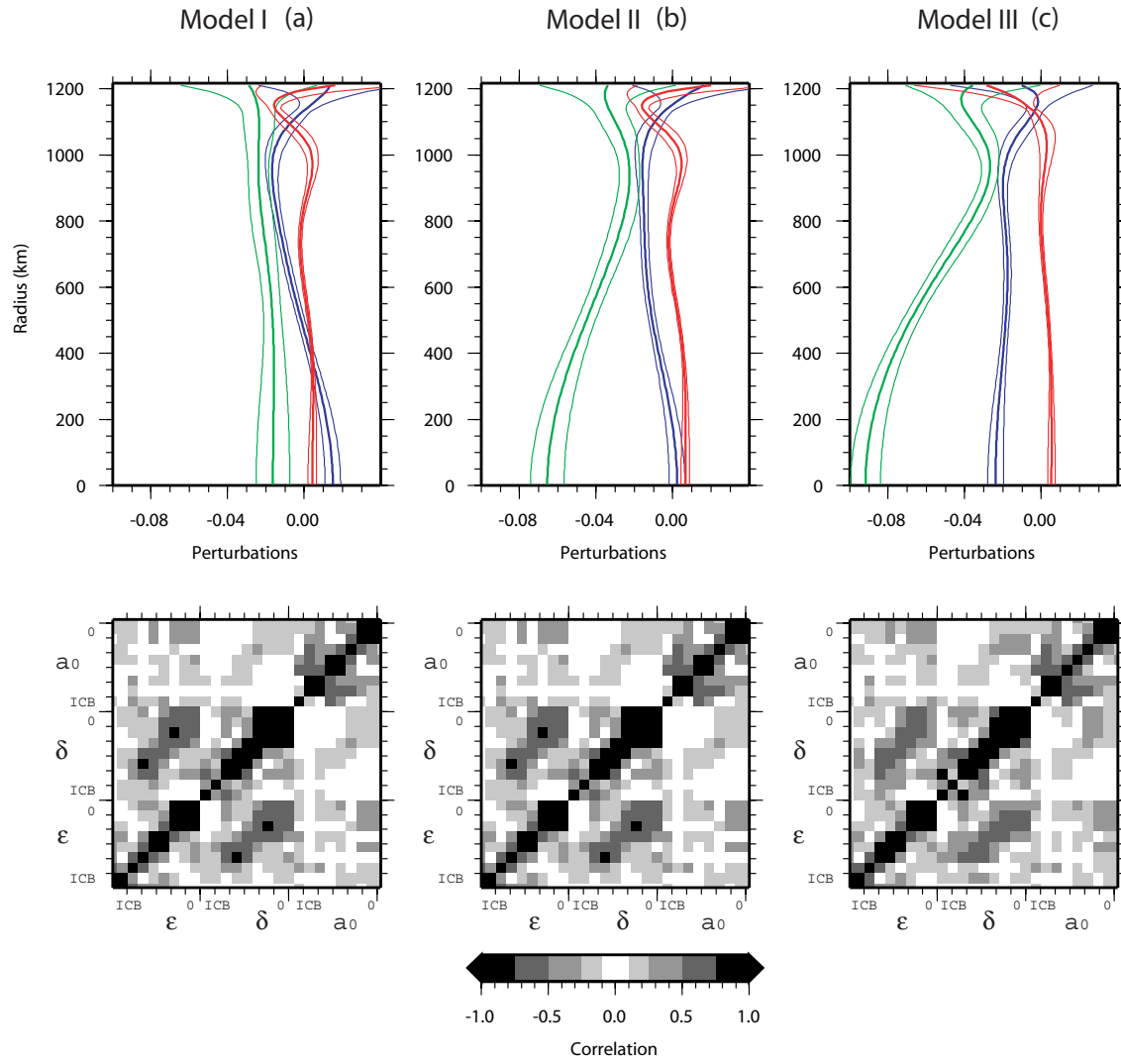


FIG. 4.29 – Exemple de modèles anisotropes de graine appartenant aux différentes classes : Modèle I avec  $\epsilon$  positif au centre de la graine (cas 1a), Modèle II avec  $\epsilon \sim 0$  au centre de la graine (cas 2a) et Modèle III avec  $\epsilon < 0$  à toutes les profondeurs (cas 3c).  $\epsilon$  en bleu,  $\delta$  en vert et  $a_0$  en rouge. Les intervalles de confiance sont donnés pour  $1\sigma$ . Les matrices de corrélation pour les perturbations  $\epsilon$ ,  $\delta$  et  $a_0$  en fonction de la profondeur sont données pour les trois inversions.

Si on examine d'un peu plus près les barres d'erreur, on constate que généralement elles sont légèrement plus importantes au centre de la graine. En effet, on ne dispose pas de beaucoup de données à grande distance épacentrale et la sensibilité est plus faible vers le centre à cause de la géométrie des noyaux de sensibilité. D'autre part, l'anisotropie n'est pas bien contrainte au sommet de la graine puisque les petites distances épacentrales n'ont pas été incluses dans l'inversion. Dans l'ensemble, pour toutes les inversions, les

paramètres anisotropes sont bien contraints.

$\epsilon$  est défini par la différence entre le temps de propagation des trajets polaires et des trajets équatoriaux. Cependant, à grande distance épacentrale, il y a peu de trajets polaires si bien qu'on introduit une corrélation entre  $\epsilon$  et  $a_0$  (comme nous l'avons vu cette corrélation peut être accentuée par le choix de la référence). D'autre part, la direction lente apparente autour de  $\xi \simeq 55^\circ$  dépend des valeurs respectives de  $\epsilon$  et  $\delta$  si bien qu'une certaine corrélation entre ces paramètres peut apparaître aux profondeurs intermédiaires dans la graine.

Les figures 4.30, 4.31 et 4.32 montrent les prédictions des modèles en comparaison avec les données. Dans l'ensemble, les modèles reproduisent relativement bien les données avec des valeurs des  $\chi^2$  comprises entre 2.0 et 3.5, à l'exception des trajets les plus polaires à grande distance épacentrale.

**Conclusion** : on observe systématiquement un changement d'anisotropie en profondeur pour un rayon compris entre 500 km et 400 km. On obtient trois grandes familles de modèles de graine avec des comportements anisotropes différents liés vraisemblablement au manque de données polaires aux grandes distances épacentrales.

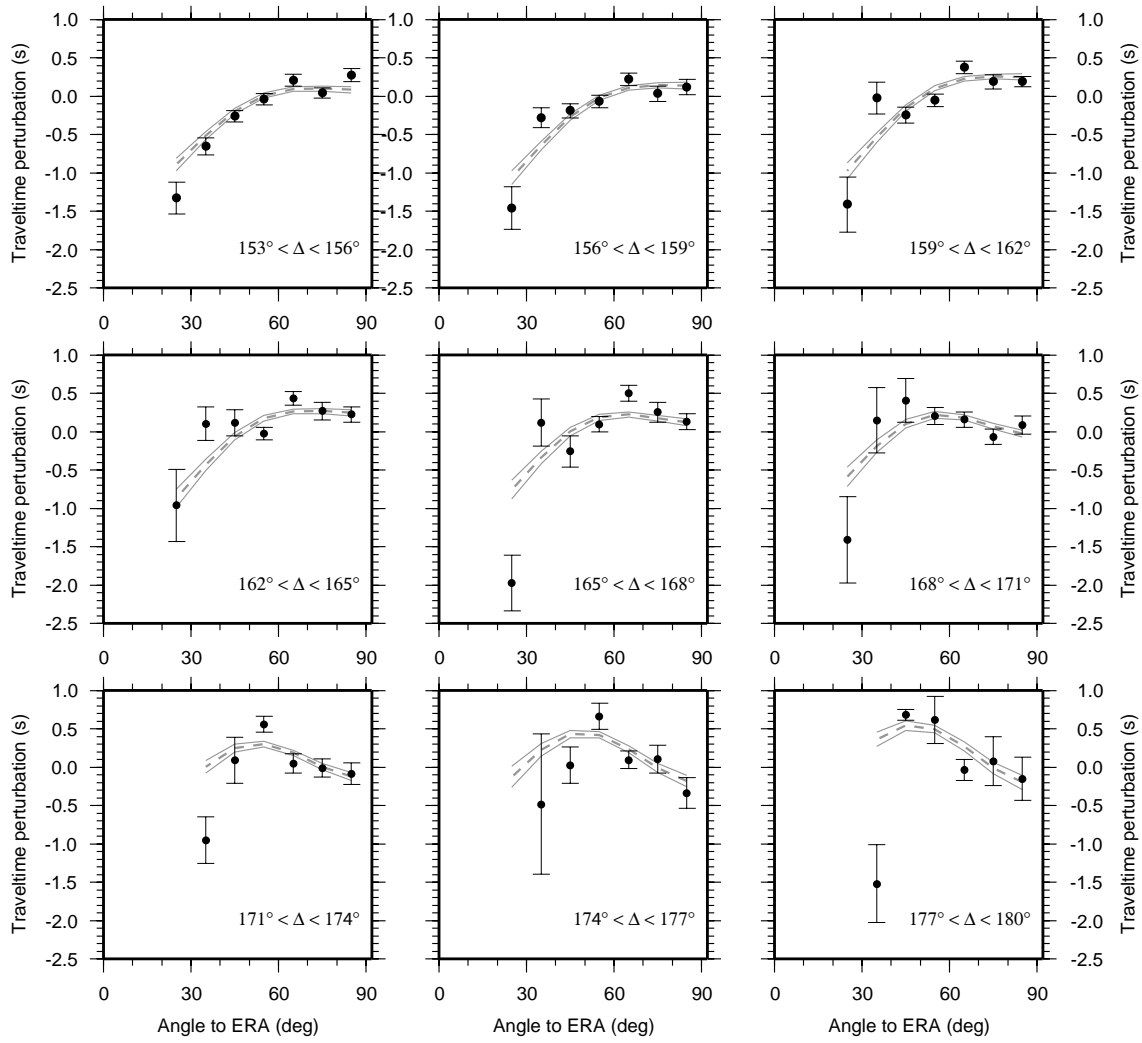


FIG. 4.30 – Prédiction du modèle I (gris) obtenu à partir de l'inversion des moyennes géographiques (cercles noirs) pour différentes gammes de distances épacentrales. Toutes les barres d'erreurs sont données pour  $1\sigma$ .

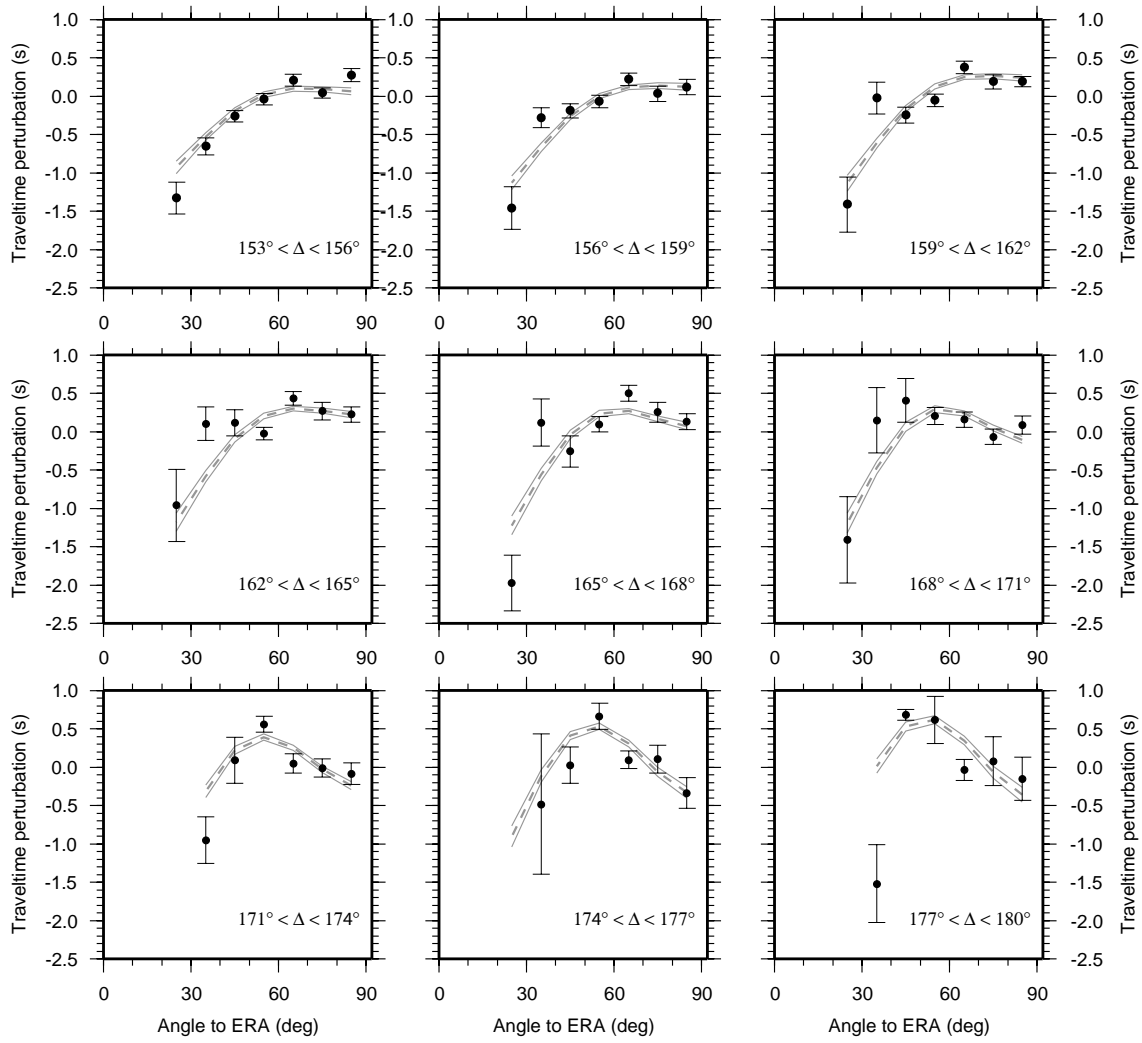


FIG. 4.31 – Prédiction du modèle II (gris) obtenu à partir de l'inversion des moyennes géographiques (cercles noirs) pour différentes gammes de distances épicentrales. Toutes les barres d'erreurs sont données pour  $1\sigma$ .



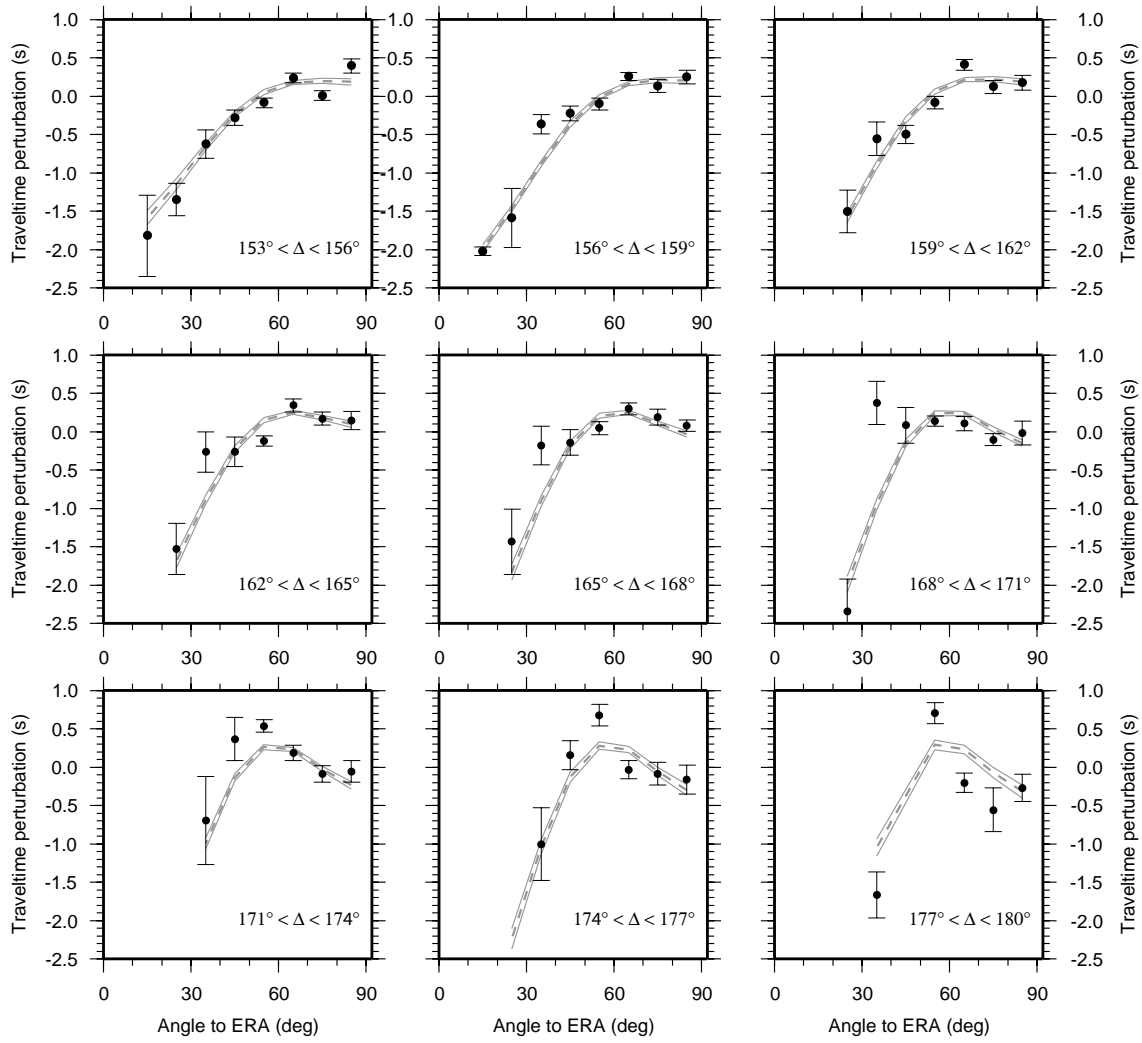


FIG. 4.32 – Prédiction du modèle III (gris) obtenu à partir de l'inversion des moyennes géographiques (cercles noirs) pour différentes gammes de distances épicentrales. Toutes les barres d'erreurs sont données pour  $1\sigma$ .

### 4.5.2 Modèles à deux couches

Nous allons maintenant inverser des modèles de graine anisotrope à deux couches afin de voir si l'on pouvait aussi bien expliquer les données avec des modèles plus simples et pour pouvoir comparer avec le modèle obtenu par Ishii et Dziewonski (2003).

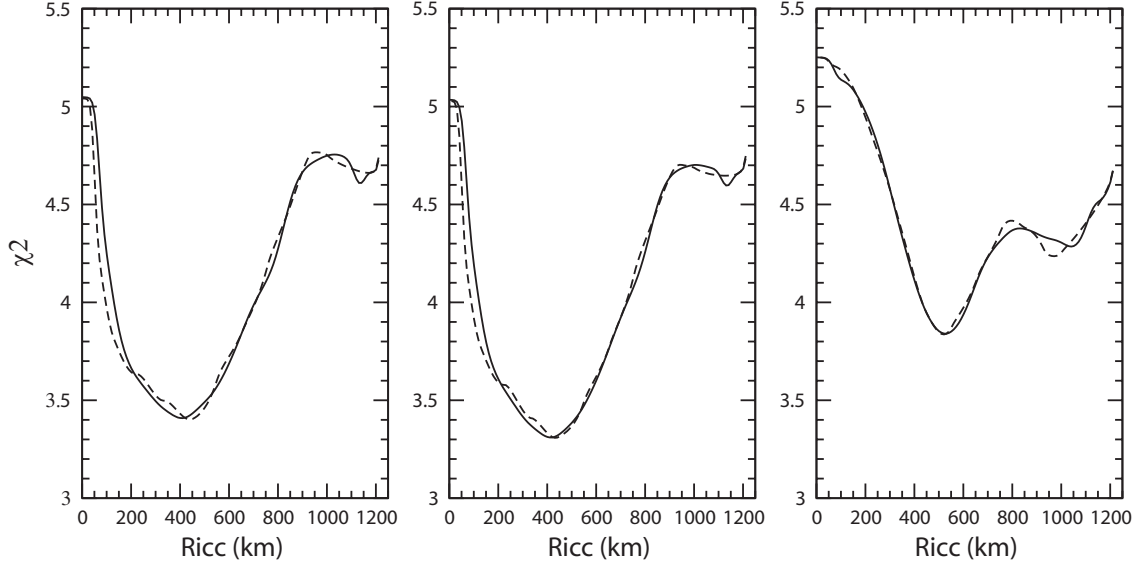


FIG. 4.33 – Variations du  $\chi^2$  en fonction du rayon de la sous-graine pour les trois familles de modèle dans le cadre de la théorie de fréquence finie (ligne solide) et de la théorie des rais (pointillés) : (a) Modèle I, (b) Modèle II et (c) Modèle III

Comme dans le cas d'une paramétrisation en polynôme, en raison principalement du moyennage en distance épacentrale, on n'observe pas de différences majeures entre la théorie des rais et celle des noyau de sensibilité. On effectue plusieurs inversions en déplaçant la position de l'interface entre les deux couches. Le rayon de la sous-graine  $R_{iic}$  correspond à la position de l'interface du modèle ayant la plus petite valeur de  $\chi^2$  (figure 4.33). L'exercice est répété pour les différents a priori ayant conduit aux trois familles de modèle décrites précédemment. On observe généralement un minimum secondaire associé à l'absence de données pour  $\Delta < 150^\circ$ . Ce minimum secondaire est beaucoup plus marqué dans le cas de l'inversion des rais résumés géométriques conduisant à un modèle de type III. Les modèles en couches obtenus sont représentés sur la figure 4.34 et les valeurs des paramètres obtenues pour chaque inversion sont répertoriées dans la table 4.7.

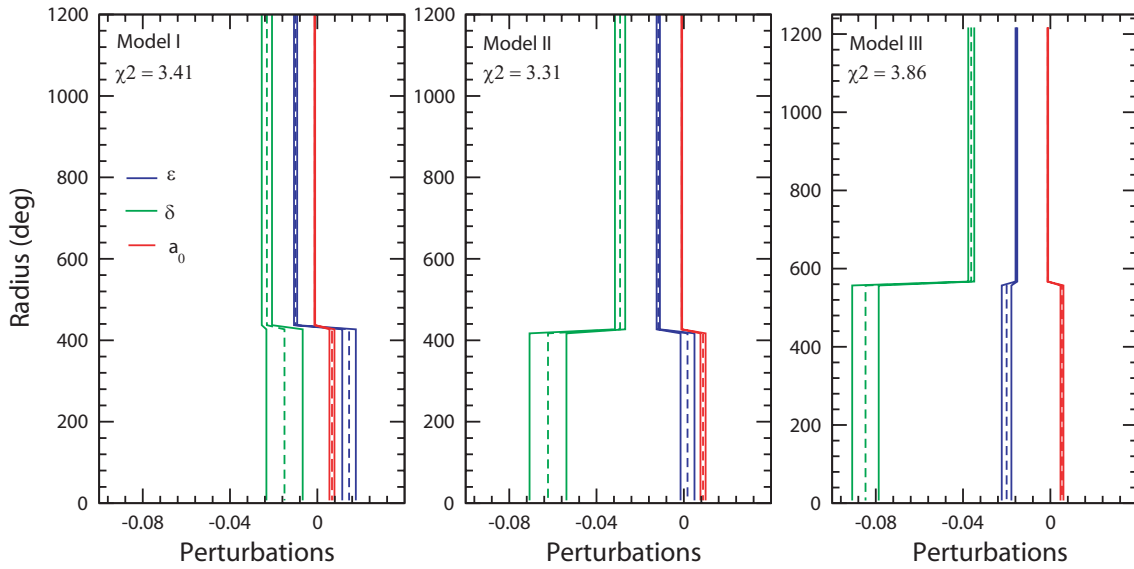


FIG. 4.34 – Modèles à deux couches obtenus avec les noyaux de sensibilité pour une période dominante de 2 s. Les intervalles de confiance sont donnés pour  $1\sigma$ .

Type de modèle	$R_{iic}$	$\chi^2$	Rayon	$\epsilon$	$\delta$	$a_0$
Modèle I	$\sim 440$ km	3.41	$R_{ICB} - R_{iic}$	$-1.00 \pm 0.02$	$-2.31 \pm 0.24$	$-0.11 \pm 0.02$
			$R_{iic} - O$	$+1.45 \pm 0.31$	$-1.50 \pm 0.85$	$+0.67 \pm 0.11$
Modèle II	$\sim 430$ km	3.11	$R_{ICB} - R_{iic}$	$-1.17 \pm 0.07$	$-2.92 \pm 0.24$	$-0.10 \pm 0.02$
			$R_{iic} - O$	$+0.17 \pm 0.04$	$-6.22 \pm 0.84$	$+0.88 \pm 0.12$
Modèle III	$\sim 550$ km	3.86	$R_{ICB} - R_{iic}$	$-1.56 \pm 0.04$	$-3.62 \pm 0.14$	$-0.12 \pm 0.02$
			$R_{iic} - O$	$-2.00 \pm 0.22$	$-8.47 \pm 0.60$	$+0.53 \pm 0.07$

TAB. 4.7 – Résultats des inversions pour les modèles de graine à deux couches.  $R_{ICB}$  est le rayon de l'ICB et  $R_{iic}$  est le rayon de la sous-graine.

Le signe de  $\epsilon$  dans la sous-graine pour le modèle I est bien contraint. Pour le modèle II, la décroissance de  $\epsilon$  est significative. Enfin, le modèle III montre bien une augmentation significative de  $|\delta|$  et du taux d'anisotropie dans la sous-graine. Les modèles I et II ont une sous-graine avec un rayon autour de 450 km tandis que le modèle III a une sous-graine beaucoup plus grosse avec un rayon de 550 km. Les modèles paramétrisés avec des polynômes ou en couches présentent des caractéristiques similaires. Les trois modèles ont une direction de propagation lente au voisinage de  $\xi \sim 45^\circ$  (figure 4.35). En effet, la vitesse des rais à  $45^\circ$  est toujours plus faible que celle des rais polaires ou équatoriaux dans la sous-graine, quelque soit le modèle considéré.

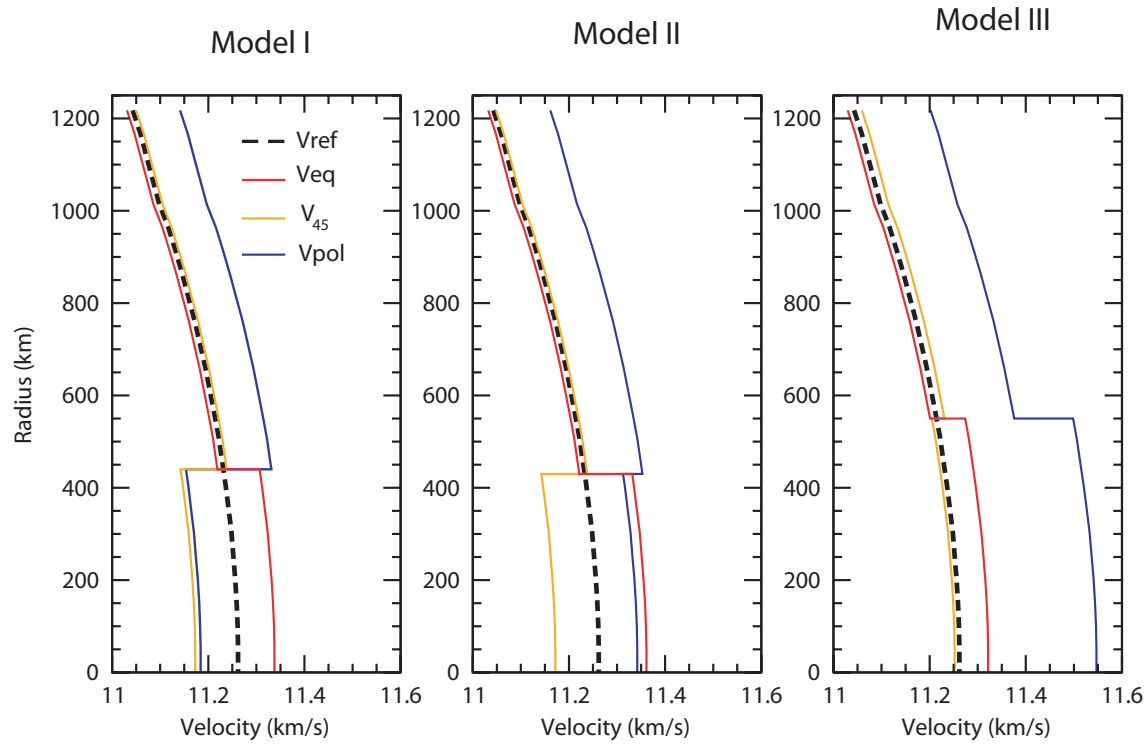


FIG. 4.35 – Variations de la vitesse des ondes P pour les trois modèles de graine en fonction de la profondeur, pour trois orientations du rai par rapport à l'axe de symétrie : rai polaire (bleu), rai à  $45^\circ$  (orange) et rai équatorial (rouge). La vitesse du modèle de référence ak135 est donnée par la ligne en pointillés. On observe systématiquement une direction lente à  $45^\circ$  de l'axe de rotation de la graine : la vitesse des ondes dans cette géométrie est plus lente que la vitesse des rais polaires et des rais équatoriaux.

Pour les trois modèles, la présence de la sous-graine crée une discontinuité avec une diminution de la vitesse pour les rais à  $45^\circ$  :  $-0.9\%$  pour le modèle I,  $-0.85\%$  pour le modèle III, mais cette diminution de vitesse est quasiment négligeable pour le modèle II. Pour le modèle I, la présence de la sous-graine crée une discontinuité avec une diminution de la vitesse de près de  $1.7\%$  pour les rais polaires. Un tel saut de vitesse devrait engendrer une zone d'ombre. Cependant, il est généralement plus facile de détecter une triplication qu'une zone d'ombre. Ainsi, un modèle de type III crée une discontinuité avec une augmentation de la vitesse de  $1.1\%$  pour les rais polaires et de  $0.5\%$  pour les rais équatoriaux. Seuls les trajets équatoriaux "voient" une augmentation de la vitesse au sommet de la sous-graine pour les modèles I ( $+0.7\%$ ) et II ( $+1.0\%$ ).

Comme Creager (1999), nous avons défini la moyenne isotrope  $\left(\frac{\delta V}{V}\right)_{iso}$  par rapport au modèle ak135. On l'obtient en intégrant sur les angles solides la perturbation de vitesse

(3.32) (voir chapitre 3) :

$$\left(\frac{\delta V}{V}\right)_{iso} = a_0 - \frac{7}{15}\epsilon + \frac{2}{15}\delta \quad (4.24)$$

Les résultats des calculs pour chacun des modèles sont reportés dans la table 4.5.2.

Modèle	Rayon (km)	$\left(\frac{\delta V}{V}\right)_{iso}$ (%)
Modèle I	1220-440	+0.05±0.06
	440-0	-0.21±0.36
Modèle II	1220-430	+0.06±0.08
	430-0	-0.03±0.36
Modèle III	1220-550	+0.12±0.06
	550-0	+0.33±0.25

TAB. 4.8 – Moyenne isotrope calculée pour les trois modèles de graine.

Le modèle I présente une moyenne isotrope négative au centre suggérant qu’il faudrait diminuer la vitesse des ondes dans ak135 dans les 450 derniers kilomètres. Cependant le signe de  $\left(\frac{\delta V}{V}\right)_{iso}$  n’est pas bien contraint. Le modèle II présente une moyenne isotrope quasiment nulle sur tout le volume de la graine suggérant que le modèle ak135 est plutôt un bon modèle de départ pour décrire la propagation des ondes P dans l’ensemble de la graine. Par contre, le modèle III a une moyenne isotrope qui augmente avec la profondeur (le signe positif de  $\left(\frac{\delta V}{V}\right)_{iso}$  est cette fois bien contraint dans la sous-graine). Il faudrait augmenter la vitesse du modèle ak135 de 0.1% dans la partie externe de la graine et de 0.3% au centre. Cependant, une moyenne isotrope positive dans la graine pourrait également signifier qu’il faut diminuer la vitesse dans la partie inférieure du noyau liquide.

Les variations en profondeur de  $\left(\frac{\delta V}{V}\right)_{iso}$  pourraient indiquer des changements de composition chimique dans la graine ou de température. Les valeurs calculées pour le modèle III sont cependant plus faibles que celles obtenues par Creager (1999) et Garcia et Souriau (2000).

## 4.6 Discussion

Cette étude a montré que l’utilisation des noyaux de sensibilité pour l’inversion de la structure anisotrope de la graine n’apporte pas de progrès significatifs par rapport à la théorie des rais du fait du moyennage des données, de la paramétrisation et de la résolution

limitée des données. Etant donné la non-unicité des solutions, l'introduction d'information a priori a une influence non-négligeable sur les inversions et conduit principalement à trois familles de modèles.

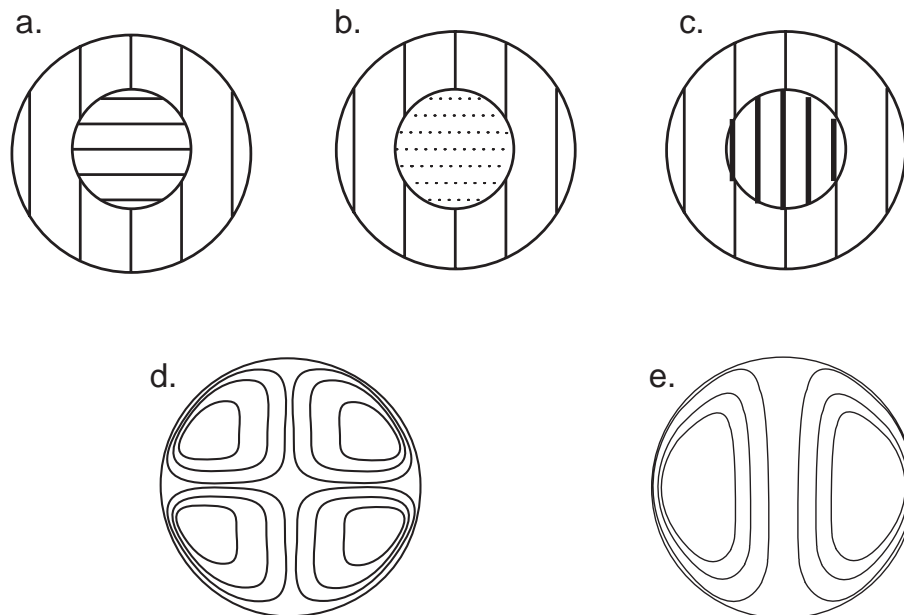


FIG. 4.36 – Les trois familles de modèles obtenus à partir de l'inversion des résidus des temps de propagation des ondes PKP(DF). Le Modèle I (a) présente un axe de symétrie parallèle à l'axe de rotation de la Terre, rapide dans la couche externe et lent au centre. Le Modèle II (b) a un taux d'anisotropie décroissant au centre de la graine. Le Modèle III (c) présente un taux d'anisotropie croissant avec la profondeur avec un axe de symétrie parallèle à l'axe de rotation de la Terre dans tout le volume de la graine. Un régime de convection d'ordre 2 (d) dans la graine pourrait engendrer une texture responsable de l'anisotropie observée pour un modèle I ou II, tandis qu'une convection avec un fort degrés 1 (e) expliquerait plutôt un modèle du type III.

Nous avons représenté ces modèles sur la figure 4.36. Le modèle I présente un changement significatif de l'anisotropie dans le coeur de la graine avec un axe lent parallèle à l'axe de rotation de la Terre. Le modèle II montre une graine avec un faible taux d'anisotropie dans sa partie centrale. Enfin, dans le modèle III, l'anisotropie augmente au centre de la graine. On observe généralement que les inversions des rais géographiques conduisent préférentiellement aux modèles I et II (la valeur minimale de  $\chi^2$  a été obtenue pour le modèle II) tandis que les inversions des rais géométriques conduisent plutôt aux modèles II et III (la valeur minimale de  $\chi^2$  a été obtenue pour le modèle III).

La table 4.9 donne un certain nombre de modèles de graine anisotrope obtenus pour la plupart à partir des résidus des ondes PKP.

Source	$\epsilon$ (%)	$\delta$ (%)
Morelli et al. (1986)	$-3.50 \pm 0.50$	$-9.60 \pm 0.20$
Su et Dziewonski (1995) ICA4B		
radius : 920-620 km	-0.69	-1.53
radius : 620-320 km	-1.60	-4.64
radius : 320-0 km	-3.32	-10.04
Creager (1999)	-1.36(East) -4.09(West)	-3.72(East) -11.18(West)
Garcia et Souriau (2000)		
radius : 1220-1120 km	-0.44 (East), +0.73 (West)	+2.76 (East), -0.35 (West)
radius : 1120-820 km	-0.56 (East), -3.28 (West)	-1.84 (East), -7.72 (West)
radius : 820-0 km	-2.56 (East), -3.08 (West)	-8.16 (East), -9.92 (West)
Ishii et al. (2002b)		
radius : 1220-550 km	-2.00	-1.37
radius : 550-0 km	0.00	-4.17
Ishii et Dziewonski (2003)		
radius : 1220-300 km	-1.80	-2.47
radius : 300-0 km	-3.70	-23.40
Cette étude ( $\chi^2$ minimum)		
radius : 1220-430 km	$-1.17 \pm 0.07$	$-2.92 \pm 0.24$
radius : 430-0 km	$+0.17 \pm 0.31$	$-6.22 \pm 0.84$

TAB. 4.9 – Quelques modèles en couches ou constants publiés.

En moyenne, on constate que les valeurs de  $\delta$  sont relativement similaires à celles obtenues dans cette étude. Mais, la plupart des modèles obtenus par l'inversion des temps de propagation des ondes de volume proposent une augmentation de l'anisotropie avec la profondeur. On retrouve bien cette famille de modèle (modèle III) dans nos inversions. Par contre, le modèle III a un taux d'anisotropie plus faible. Le modèle de Ishii et al. (2002b), obtenu à partir des ondes de volume et des modes propres, présente des caractéristiques assez proche du modèle II. Par contre, seules les études inversant seulement les modes propres présentaient jusqu'à maintenant un changement du signe de  $\epsilon$  en profondeur (Romanowicz et Bréger, 2000; Beghein et Trampert, 2003).

Si on considère que l'axe de symétrie est parallèle à l'axe de rotation de la Terre,

alors le modèle de Ishii et Dziewonski (2003) présente une forte anisotropie au centre. La valeur de  $\delta$  dans la sous-graine est trop importante ( $\delta = -23.4\%$ ) pour être considérée comme une perturbation du premier ordre. Avec une sous-graine de 300 km de rayon et un taux d'anisotropie de 3.5 %, il faut alors introduire une forte valeur de  $\delta$  au centre de la graine pour reproduire la direction lente apparente à  $\xi \simeq 55^\circ$  dans la gamme de distances épacentrales  $173^\circ - 180^\circ$  sans invoquer une déviation de l'axe de symétrie par rapport à l'axe de rotation de la Terre. Si une telle sous-graine existait, on aurait une discontinuité dans la graine qui devrait être visible dans les données sismologiques. Cependant, toutes les tentatives pour détecter une zone d'ombre ou une triPLICATION (en fonction de l'orientation du rai par rapport à l'axe de symétrie), ou encore des ondes réfléchies à la discontinuité ont échoué (Cormier et Stroujkova, 2005; Garcia et al., 2006). D'autre part, Cormier et Stroujkova (2005) supposent que si une telle discontinuité est nécessaire pour expliquer les résidus de PKP(DF), elle serait plutôt située à un rayon de 500 km comme le suggèrent les mesures d'atténuation (Li et Cormier, 2002). Avec une graine plus grosse, le saut de vitesse est plus faible. Les résultats de nos inversions vont dans ce sens, puisque le rayon de la sous-graine est estimé entre 400 km et 550 km avec des paramètres anisotropes de plus faible amplitude. Par ailleurs, l'absence d'observation d'une triPLICATION ou d'une zone d'ombre est plus favorable à des modèles avec un changement de comportement anisotrope progressif dans une zone de transition vers 500 km de rayon.

L'anisotropie de la graine est généralement attribuée à une orientation préférentielle des cristaux de fer. Si une telle fabrique existe, elle est tout d'abord fonction de la phase du fer stable dans la graine. La nature de la phase de fer stable aux conditions thermodynamiques n'est pas encore clairement définie compte tenu des incertitudes sur la température de la graine et sur la concentration en éléments légers (Boehler, 1993; Saxena et al., 1995; Andrault et al., 2000; Lin et al., 2002a,b; Vočadlo et al., 2003). Par ailleurs, si on admet que la phase du fer stable dans la graine est le fer  $\epsilon$ , des études théoriques et expérimentales montrent une forte variabilité des propriétés anisotropes de cette phase en fonction des conditions thermodynamiques, du type d'expérimentation et des approches théoriques (Mao et al., 1998; Steinle-Neumann et al., 2001; Antonangeli et al., 2004; Merkel et al., 2005).

Si on considère que la convection thermique dans la graine est à l'origine de l'orientation préférentielle du fer, les modèles simples de convection d'ordre 1 ou 2 (Figures 4.36d et 4.36e) pourraient expliquer les modèles anisotropes obtenus. Cependant, pour correctement comprendre la mise en place d'une texture du fer h.c.p. par convection dans la graine et expliquer ses propriétés anisotropes, on a besoin d'identifier les systèmes de glissement



actifs dans les conditions thermodynamiques de la graine. Ces systèmes de glissement ne sont pas encore parfaitement contraints (Poirier et Price, 1999; Wenk et al., 2000a).

Romanowicz et al. (1996) ont montré que l'anisotropie de la graine est compatible avec une texture engendrée par un régime de convection simple (voir figure 4.36e) en considérant que l'axe  $\hat{c}$  rapide du fer s'aligne le long des lignes de courant. Ce modèle présente une vitesse importante au centre pour les ondes qui se propagent parallèlement à l'axe de rotation de la graine. Il est en bon accord avec le modèle III. D'autre part, un modèle de convection d'ordre 2 (figure 4.36d) pourrait expliquer les modèles I et II. En effet, si l'axe cristallographique rapide du fer s'aligne selon les lignes de courant alors un tel régime pourrait engendrer une direction de propagation rapide dans le plan de l'équateur à grande distance épacentrale. Néanmoins, Poirier et Price (1999) et Wenk et al. (2000a) ont montré que l'axe  $\hat{c}$  du fer h.c.p. a plutôt tendance à s'aligner perpendiculairement aux lignes de courant conduisant à une anisotropie en contradiction avec les observations sismologiques si l'axe  $\hat{c}$  est rapide ( $C_{33} > C_{11}$ ).

On peut évoquer d'autres processus pour expliquer les modèles anisotropes de graine. Par exemple, le modèle III, avec une augmentation du taux d'anisotropie pourrait indiquer un changement de phase ou un alignement plus parfait de la fabrique de fer. Des variations chimiques, engendrées par des processus de différenciation au cours de la formation de la graine, pourraient également produire une augmentation de l'anisotropie avec la profondeur. Par contre, les modèles qui présentent un changement du signe de  $\epsilon$  pourraient indiquer un changement du système de glissement à haute pression ou un changement de texture associé au régime de convection thermique dans la graine.

## 4.7 Conclusion

Pour des distances épacentrales comprises entre  $165^\circ$  et  $180^\circ$ , les variations des résidus des temps de propagation des ondes PKP(DF) en fonction de l'angle  $\xi$  montrent une tendance différente de celles observées à plus courte distance. Une direction lente apparente est observée autour de  $\xi \sim 50^\circ$ . Cette observation est en accord avec des études précédentes (Ishii et Dziewonski, 2002, 2003) bien que l'on ait utilisé un jeu de données différent (le fichier EHB au lieu de ISC), un autre modèle de référence (ak135 plutôt que PREM), une construction différentes des rais résumés et des corrections de manteau différentes. Nous avons montré que ces données peuvent être expliquées par des modèles de graine très différents.

A cause de la paramétrisation, du moyennage en rais résumés et en distance épacentrale,

ainsi que de la faible résolution de ces données, nous n'avons pas observé de différences significatives dans le résultat des inversions utilisant les noyaux de sensibilité ou la théorie des rais. Par contre, la méthode utilisée pour construire les rais résumés aussi bien que l'introduction de l'information a priori influencent fortement le résultat de l'inversion. À partir de l'inversion des résidus de PKP(DF), nous avons obtenu trois familles de modèles de graine avec un changement d'anisotropie pour un rayon autour de 400 km à 550 km (à comparer avec une sous-graine de 300 km pour Ishii et Dziewonski (2003) et de  $\sim 400$  km pour Beghein et Trampert (2003)) :

- Modèle I : une sous-graine avec un axe lent parallèle à l'axe de rotation de la Terre
- Modèle II : une sous-graine avec un taux d'anisotropie quasiment nul
- Modèle III : une sous-graine présentant une augmentation d'anisotropie pour un axe de symétrie rapide parallèle à l'axe de rotation de la Terre

L'existence de ces différents modèles reflète partiellement le mauvais échantillonnage de la graine par les ondes PKP(DF) résultant de la distribution géographique des stations et des séismes. Il faut plus de données à grande distance épacentrale pour contraindre la structure anisotrope du centre de la graine. Jusqu'à présent, la plupart des études de la graine sont basées sur des données tirées de catalogues, souvent de mauvaise qualité, et qu'il faut moyenner pour extraire l'information pertinente. Ces catalogues ne permettent pas d'utiliser de façon adéquate les noyaux de sensibilité puisque le contenu fréquentiel des ondes qui ont été pointées n'est pas précisé. Le développement de nouvelles méthodes d'analyse de forme d'onde (Garcia et al., 2004, 2006) devrait permettre d'augmenter sensiblement le nombre de données disponibles en particulier dans la gamme de distances correspondant à la triplication. En effet, en raison de la complexité des sismogrammes, les formes d'onde n'étaient pas systématiquement analysées. Par ailleurs, ces données permettent d'exploiter correctement les noyaux de sensibilité puisque le contenu fréquentiel de la source est également inversé. D'autres types de données telles que les temps d'arrivée des ondes P'P' (PKPPKpdf) pourraient apporter des contraintes cruciales sur la structure profonde de la graine (Tkalčić et Flanagan, 2004).

Enfin, les temps différentiels des phases PKP permettent d'étudier la structure de la graine ainsi que celle du manteau inférieur. Si ces résidus différentiels sont moins sensibles aux structures au voisinage de la source et du récepteur, ils peuvent être fortement affectés par les structures dans la couche D". Bréger et al. (2000) ont observé que les hétérogénéités dans le manteau inférieur échantillonné par les ondes PKP pouvaient affecter de façon très significative le signal attribué à la graine en expliquant les variations des résidus PKP(AB)-PKP(DF) en fonction de l'angle  $\xi$ . Si on veut améliorer la résolution de la

structure anisotrope de la graine, il faut certes davantage de données, mais il faut aussi être capable de corriger les perturbations du temps de propagation des ondes PKP associées aux structures dans le manteau inférieur. Pour cela, on a besoin d'un bon modèle pour la couche D". La structure de la couche D" paraît à ce jour extrêmement complexe (Garnero, 2004). La plupart des images tomographiques en ondes P obtenues jusqu'à présent sont basées sur la théorie des rais. Or, les phases qui sont le plus sensibles aux structures de la couche D", les ondes P et S avec des incidences très rasantes, les ondes  $P_{diff}$  et  $S_{diff}$  diffractées à la CMB, les phases du noyau SKS et PKP(AB), présentent des volumes de Fresnel relativement importants dans le manteau inférieur. Les noyaux de sensibilité de ces ondes pourraient être des outils fort utiles pour obtenir une image haute résolution de la couche D". Dans le chapitre suivant, on se propose d'examiner les effets de fréquence finie sur le temps de propagation des phases PKP en calculant les noyaux de sensibilité correspondant.

# Chapitre 5

## Noyaux de sensibilité des ondes PKP dans un manteau isotrope

Dans ce chapitre, nous examinons les effets de fréquence finie sur le temps de propagation des ondes PKP. En raison de leur longue trajectoire dans le manteau, les ondes PKP ont une zone de Fresnel importante à la CMB et échantillonnent donc un volume important de la couche D'' (Kvasnička et Janský, 1999). Les phases PKP permettent d'étudier le manteau inférieur et en particulier la couche D'', très hétérogène, ainsi que le noyau liquide et la graine solide. Il semble donc pertinent de bien comprendre comment ces phases échantillonnent le milieu. Nous avons ainsi calculés les noyaux de sensibilité pour les trois phases transmises en tenant compte des interférences entre chacune des phases PKP. Les noyaux des PKP n'ont pas toujours une forme simple en "banana-doughnut" en raison des interférences entre les différentes phases, de la présence de la zone d'ombre, et de la caustique dans le noyau liquide. Enfin, nous examinerons la structure des noyaux différentiels entre les phases transmises (Calvet et Chevrot, 2005).

### 5.1 Pourquoi s'intéresser à la structure 3D des ondes PKP dans le manteau ?

Un grand nombre d'études de l'anisotropie de la graine sont basées sur l'étude du temps de propagation des ondes PKP(DF) (Poupinet et al., 1983; Morelli et al., 1986; Shearer, 1994; Su et Dziewonski, 1995; Garcia et Souriau, 2000; Ishii et Dziewonski, 2002, 2003). Cependant, la phase PKP(DF) échantillonne la lithosphère, le manteau et la couche D''. Afin de réduire la contribution des hétérogénéités dans le manteau au niveau de la

source et du récepteur, on utilise souvent les temps différentiels PKP(AB)-PK(DF) ou PKP(BC)-PKP(DF) pour étudier l'anisotropie de la graine (Shearer et Toy, 1991; Creager, 1992, 2000; Tanaka et Hamaguchi, 1997). Cependant à grande distance épacentrale, les phases AB et DF ont une trajectoire assez différente dans le manteau inférieur. Ainsi, les anomalies de la couche D'' peuvent affecter les temps différentiels AB-DF (Bréger et al., 1999, 2000). En effet, étant donnée la trajectoire rasante de la phase AB à la CMB, elle est beaucoup plus sensible aux anomalies de vitesses dans la couche D'' que la phase DF. Par conséquent il semble nécessaire d'avoir un bon modèle de manteau et de la structure de la couche D'' avant de pouvoir contraindre la structure anisotrope de la graine.

La couche D'' est au centre des débats dans différents domaines des géosciences. La couche D'' est une couche thermique et chimique qui joue un rôle important dans la dynamique du manteau. Les ondes sismiques ont révélé la complexité de sa structure. À l'aide des ondes P diffractées, Wyssession (1996) a montré l'existence de structures de taille continentale dans la couche D''. De nombreuses études ont souligné le haut degrés de complexité de la D'', avec un saut de vitesse positif au sommet de cette couche (e.g., Lay et Helmberger, 1983a,b; Houard et Nataf, 1992; Vidale et Benz, 1993; Kendall et Shearer, 1994), une zone de faible vitesse juste au dessus de la CMB (e.g., Garnero et Helmberger, 1996), de la fusion partielle (e.g., Lay et al., 2004), la présence d'anisotropie sismique (e.g., Maupin, 1994; Kendall et Silver, 1996), des systèmes de convection à petite échelle avec la formation de plumes mantelliques (e.g., Bréger et Romanowicz, 1998; Montelli et al., 2004a). Ainsi, la plupart des modèles de Terre 1-D proposent une discontinuité au sommet de la couche D''.

La couche D'' focalise également l'attention des physiciens des roches à haute pression et haute température. En effet, des mesures en laboratoire par diffraction des rayons X, aux conditions thermodynamiques de la CMB, suggèrent que la pérovskite  $MgSiO_3$  présente un changement de phase à haute pression, avec une augmentation de la densité de l'ordre de 1.0 à 1.2% (Murakami et al., 2004). Ce changement de phase pourrait être à l'origine de la discontinuité sismique au sommet de la D''. La structure de cette phase de haute pression pourrait également expliquer l'anisotropie observée dans la couche D''.

La plupart des modèles tomographiques à l'échelle globale présentent des caractéristiques semblables. Par contre, des différences importantes sont observées en ce qui concerne les petites structures. L'analyse des temps différentiels des PKP a montré que la couche D'' pouvait présenter de forts contrastes de vitesse difficiles à interpréter dans le cadre de la théorie des rais (Bréger et al., 1999; Luo et al., 2001; Garcia et al., 2004). Les temps différentiels permettent également d'étudier le manteau inférieur (Sylvander et

Souriau, 1996; Karason et van der Hilst, 2001; Tkalčić et al., 2002). Enfin, certaines de ces études évoquent l’existence de structures de l’ordre de quelques centaines de kilomètres seulement (Poupinet et Souriau, 1995; Bréger et al., 1999).

Les noyaux de sensibilité des ondes P et PP (onde P se réfléchissant à la surface) ont déjà été utilisés pour obtenir une tomographie haute résolution du manteau. Le travail de Montelli et al. (2004b) suggère que l’utilisation des noyaux de sensibilité permet de mettre en évidence des anomalies de vitesse qui étaient trop faibles pour être détectées avec la théorie des rais. Cependant les phases utilisées dans cette étude ne permettent pas d’avoir une résolution importante dans le manteau inférieur. Pour améliorer cette résolution, il est indispensable d’introduire des phases telles que les ondes PKP et les phases diffractées à la CMB (Karason et van der Hilst, 2001). La construction des noyaux de sensibilité à l’aide de la théorie des rais ne permet pas de décrire la diffraction des ondes à une discontinuité. Il faudra donc développer une autre approche pour calculer les noyaux de sensibilité des ondes  $P_{diff}$ . Par contre les noyaux de sensibilité des ondes PKP peuvent être construits à partir de la méthode décrite au chapitre 3.

## 5.2 Noyaux de sensibilité simples

Malgrès un contenu fréquentiel haute fréquence, les phases PKP échantillonnent un volume important du manteau inférieur compte tenu de leur longue trajectoire dans la Terre. Nous appliquerons dans cette section la méthode développée par Dahlen et al. (2000) pour calculer les noyaux pour le temps de propagation absolu des trois phases transmises PKP(AB), PKP(BC) et PKP(DF). Nous examinerons ici les noyaux de sensibilité pour une perturbation isotrope de la vitesse des ondes P par rapport au modèle ak135 (Kennett et al., 1995) (nous avons montré au chapitre 2, que les contributions de la perturbation de la densité et de la vitesse de phase des ondes S sont négligeables pour le temps de propagation des ondes P).

### 5.2.1 Interférences entre les différentes phases PKP

La présence du noyau liquide, avec une diminution de la vitesse des ondes P à la CMB, induit une zone d’ombre. Dans cette zone d’ombre, c’est-à-dire pour des distances épacentrales entre  $100^\circ$  et  $143^\circ$ , aucune phase ne peut en principe être enregistrée. Cependant, la phase P diffractée, longeant la CMB, est observée dans cette gamme de distances. Au-delà de  $143^\circ$  de distance épacentrale, il existe deux phases ayant leur point le plus bas dans le

noyau liquide : la phase PKP(AB) qui échantillonne essentiellement la partie supérieure du noyau liquide, et la phase PKP(BC) qui se propage dans la partie inférieure du noyau liquide (figure 5.1).

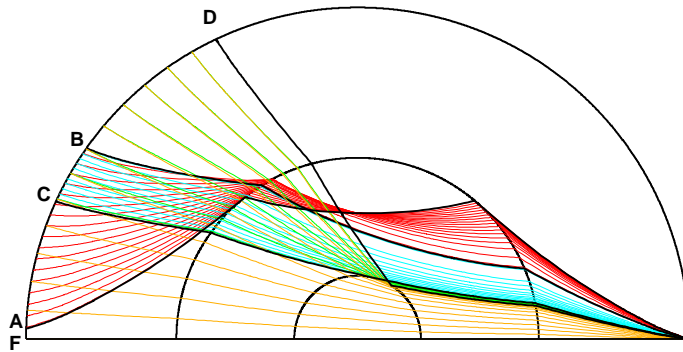


FIG. 5.1 – Trajectoires dans la Terre des quatre phases traversant le noyau : PKP(AB) (rouge), PKP(BC) (bleu), PKP(CD) (vert) et PKP(DF) (orange).

À l'ICB, l'augmentation de la vitesse des ondes P génère une triplication dans l'hodochrone de la PKP(BC), engendrant la phase réfléchie PKP(CD) et la phase réfractée PKP(DF) (figure 5.2). Ainsi, pour une source en surface, les phases PKP(DF) peuvent être observées à partir d'une distance épacentrale de  $115^\circ$ . La phase PKP(BC) n'est observée qu'entre  $148^\circ$  et  $155^\circ$  (à plus grandes distances épacentrales, on peut observer une phase diffractée PKP<sub>diff</sub>), tandis que la phase PKP(AB) est enregistrée pour des distances comprises entre  $148^\circ$  et pratiquement  $180^\circ$ .

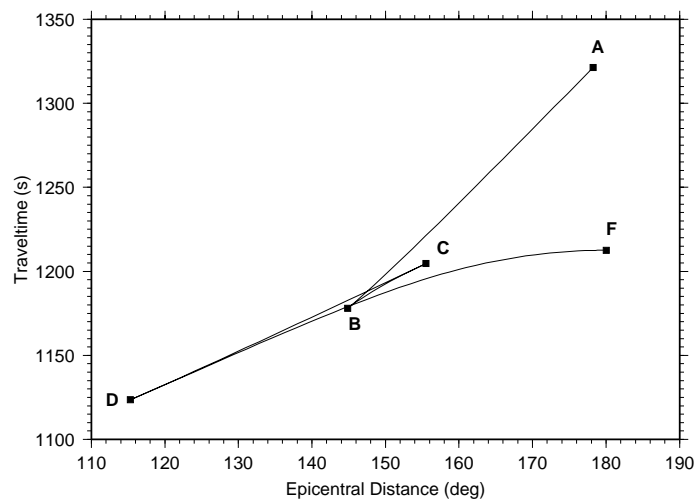


FIG. 5.2 – Hodochrones des phases PKP calculées dans le modèle ak135 pour une source en surface.

En fonction de la distance épacentrale et de la position du point diffractant dans le manteau, plusieurs phases diffusées peuvent arriver dans la même fenêtre de corrélation. Ainsi, chaque phase PKP peut donc contribuer au noyau de sensibilité des autres. Le noyau de sensibilité peut s'écrire sous la forme suivante :

$$K_\alpha = -\frac{1}{2\pi} \sum_{AB,BC,CD,DF} \Omega_\alpha^{P \rightarrow P} \frac{1}{\alpha_X \alpha_R} \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{R}' \mathcal{R}''} \frac{\Pi_1 \Pi_2}{\Pi} \times \frac{\int_0^{+\infty} \omega^3 |\dot{m}(\omega)|^2 \sin \left[ \omega(T' + T'' - T) - (M' + M'' - M) \frac{\pi}{2} \right] d\omega}{\int_0^{+\infty} \omega^2 |\dot{m}(\omega)|^2 d\omega} \quad (5.1)$$

Ainsi, pour calculer le noyau de sensibilité d'une phase PKP, il faut calculer les temps  $T, T', T''$ , et les expansions géométriques  $\mathcal{R}, \mathcal{R}', \mathcal{R}''$  de chacune des phases susceptibles d'être diffusées par le point diffractant considéré. La méthode pour calculer ces noyaux est similaires à celle exposée au chapitre 3. Cependant, pour chaque profondeur du point diffractant, il faudra calculer les tables pour chacune des phases PKP. D'autre part, les courbes  $X(p)$  varient fortement avec la profondeur du point diffractant (figure 5.3). Les paramètres de rais correspondant à l'extrémité de chacune des branches PKP varient donc avec la profondeur et il faudra les définir pour chaque profondeur. Enfin, en fonction des distances  $\Delta_{SX}$  et  $\Delta_{XR}$ , il faut prédire quelle phase est susceptible de se propager entre la source et le point diffractant, et entre le point diffractant et le récepteur.

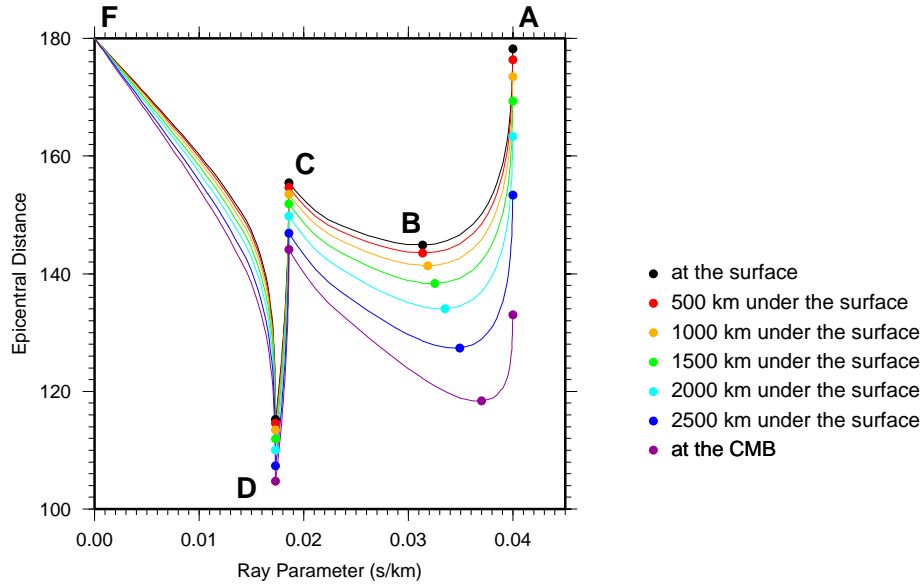


FIG. 5.3 – Variation de la distance épacentrale en fonction du paramètre de rai et de la profondeur.



Pour les points diffractants situés dans le volume de Fresnel, susceptibles de contribuer au signal observé en surface, l'onde diffusée correspondante sera toujours constituée d'une branche traversant le noyau (correspondant à l'une des phases PKP) et d'une branche restant dans le manteau. Le cas d'une onde diffractée à la CMB ne pourra être pris en compte puisque l'approche utilisée ici pour dériver l'expression des noyaux de sensibilité fait appel à la théorie géométrique des rais qui ne peut décrire une onde diffractée à une discontinuité.

### 5.2.2 La caustique B

Pour calculer les noyaux, il faut également préciser les coefficients de Maslov  $M$ ,  $M'$ ,  $M''$  de la phase de référence et de la phase diffusée. Examinons à nouveau les variations de la distance épacentrale en fonction du paramètre de rai (figure 5.3). Lorsque la distance épacentrale augmente avec le paramètre de rai, on dit que la branche est prograde. Quand la distance épacentrale diminue avec le paramètre de rai, la branche est dite rétrograde. La transition d'une branche prograde à rétrograde puis à nouveau prograde génère une triplication dans les hodochrones. Pour les phases du noyau liquide, le point B est une caustique : la phase PKP(AB) est rétrograde, tandis que la phase PKP(BC) est prograde.

La phase PKP(AB) va traverser cette caustique (convergence des rais dans le noyau liquide). La caustique induit un déphasage de  $\pi/2$  (Choy et Richards, 1975; Choi et Hron, 1981). L'indice de Maslov comptabilise le nombre de déphasages de  $\pi/2$  associés au passage par une caustique (Choi et Hron, 1981). Ainsi, l'indice de Maslov de la PKP(DF) et PKP(BC) est  $M = 0$  tandis que celui de la PKP(AB) est  $M = 1$ . Pour la phase diffusée, si le rai entre la source et le point diffractant reste dans le manteau alors  $M' = 0$ . De même, si le rai entre le point diffractant et le récepteur reste dans le manteau alors  $M'' = 0$ .

Ainsi la contribution des phases PKP(AB), PKP(BC) et PKP(DF) à leur noyau respectif est caractérisée par  $M' + M'' - M = 0$  et le terme oscillatoire dans (5.1) est  $\sin[\omega(T' + T'' - T)]$ . Par contre, la contribution de la PKP(AB) au noyau de la PKP(DF) ou de la PKP(BC) est caractérisée par  $M' + M'' - M = 1$ , et le terme oscillatoire dans (5.1) devient  $-\cos[\omega(T' + T'' - T)]$ . De façon similaire, la contribution de la phase PKP(BC) ou PKP(DF) au noyau de la AB est caractérisée par  $M' + M'' - M = -1$  et le terme oscillatoire devient  $\cos[\omega(T' + T'' - T)]$ . Les différentes combinaisons sont résumées dans la table 5.1.

	Type de noyau de sensibilité		
	AB	BC	DF
<b>Contribution</b>			
AB	$M' + M'' - M = 0$ $\sin[\omega(T' + T'' - T)]$	$M' + M'' - M = 1$ $-\cos[\omega(T' + T'' - T)]$	$M' + M'' - M = 1$ $-\cos[\omega(T' + T'' - T)]$
BC	$M' + M'' - M = -1$ $\cos[\omega(T' + T'' - T)]$	$M' + M'' - M = 0$ $\sin[\omega(T' + T'' - T)]$	$M' + M'' - M = 0$ $\sin[\omega(T' + T'' - T)]$
DF	$M' + M'' - M = 0$ $\sin[\omega(T' + T'' - T)]$	$M' + M'' - M = -1$ $\cos[\omega(T' + T'' - T)]$	$M' + M'' - M = 0$ $\sin[\omega(T' + T'' - T)]$

TAB. 5.1 – Expression du terme oscillatoire dans l'expression des noyaux de sensibilité des phases PKP en fonction du type de contribution.

Si on utilise une fonction source du type dérivée  $n^{eme}$  de gaussienne, il existe une solution analytique à l'intégrale sur les fréquences qui apparait dans l'expression (5.1) si le terme oscillatoire est en " $\sin[\omega(T' + T'' - T)]$ ".

### 5.2.3 Description des noyaux

Les noyaux de sensibilité pour le temps de propagation des ondes PKP dans le manteau ont une structure similaire à celui de l'onde P dans le manteau (Hung et al., 2000). Cependant, la forme "classique" en "banana-doughnut" peut être fortement perturbée par les interférences entre les différentes phases PKP.

La figure 5.4 montre les noyaux de sensibilité de la PKP(DF) pour des distance épacentrale variant entre  $140^\circ$  et  $170^\circ$ . Au voisinage de la triplication, c'est à dire pour des distances épacentrales proche du point B, la contribution des phases AB et BC devient significative puisque les trois phases sont susceptibles d'arriver dans la même fenêtre de corrélation. Pour une onde d'environ 2 s de période dominante, la sensibilité au niveau de la CMB s'étale sur près de 1400 km. A plus courte distance épacentrale, les phases du noyau diffusées par des points diffractants dans le manteau inférieur peuvent encore interférer avec la phase PKP(DF) de référence. Enfin, au delà de la triplication, les phases AB, BC et CD (réfléchi à l'ICB) sont trop lentes par rapport à la PKP(DF) et n'entrent donc pas dans la fenêtre de corrélation.

La phase PKP(BC) est enregistrée pour une gamme de distances épacentrales restreinte. Dans cette gamme, la phase PKP(AB) est généralement plus lente que la PKP(BC), et on n'observe pas d'interférences entre ces deux phases pour des distances épacentrales

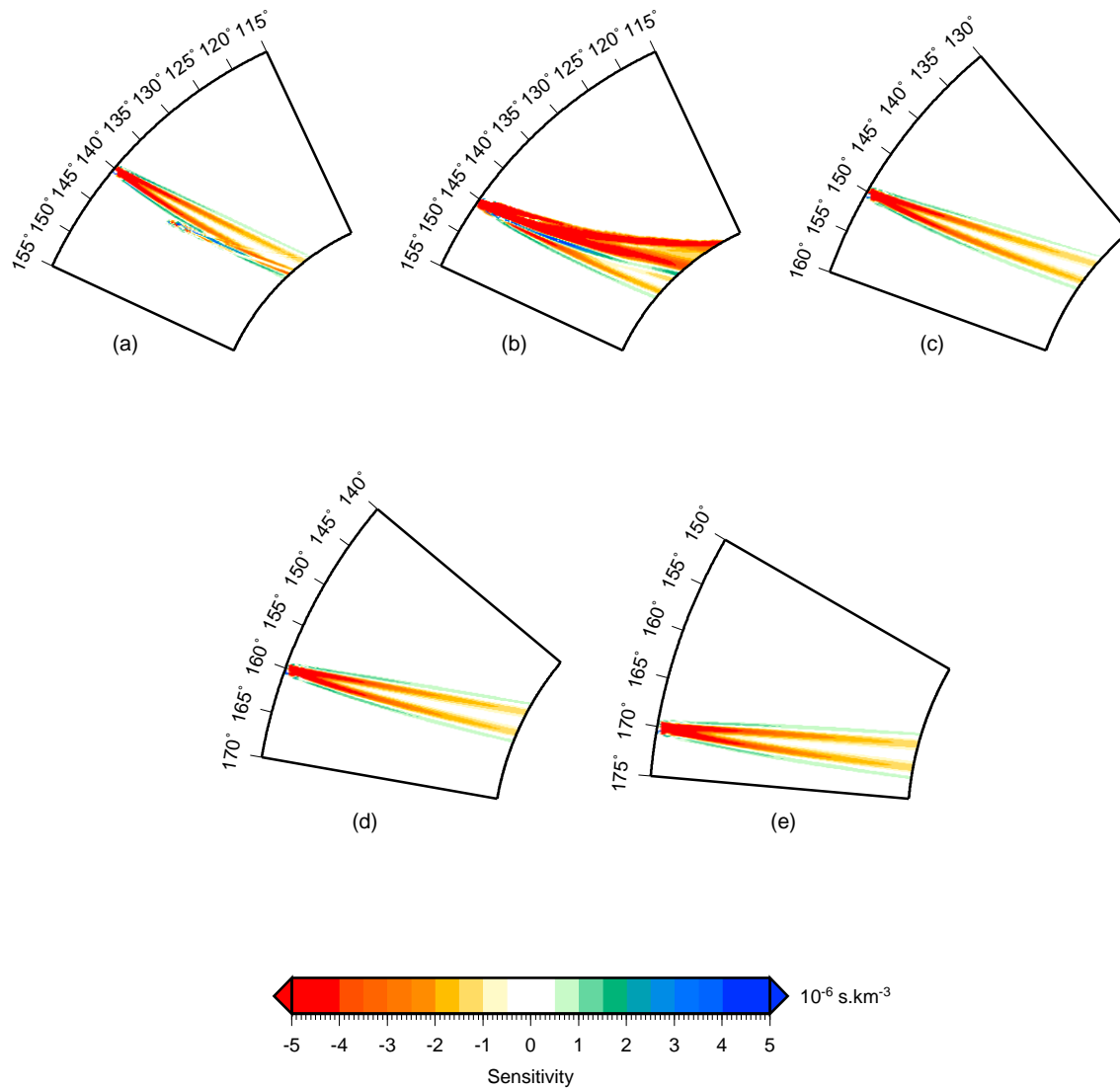


FIG. 5.4 – Section dans le manteau et dans le plan d'incidence du noyau  $K_\alpha$  de la phase PKP(DF) pour une période dominante de 2.25 s. Le noyau a été calculé pour cinq distances épicentrales : 140° (a), 145.5° (b), 150° (c), 160° (d) et 170°.

supérieures à  $145.5^\circ$  (figure 5.5b). Par contre, une onde PKP(DF) est plus rapide donc une telle phase diffusée par une hétérogénéité dans le manteau peut entrer dans la fenêtre de corrélation et donc interférer avec la phase PKP(BC) de référence. Cependant, au delà de la triplication, la contribution de la phase PKP(DF) au noyau de la PKP(BC) est quasiment négligeable. Enfin, pour une distance épacentrale proche de la triplication, l'amplitude du noyau de la BC est faible dans le manteau inférieur : les phases AB, BC et DF interfèrent de façon destructive.

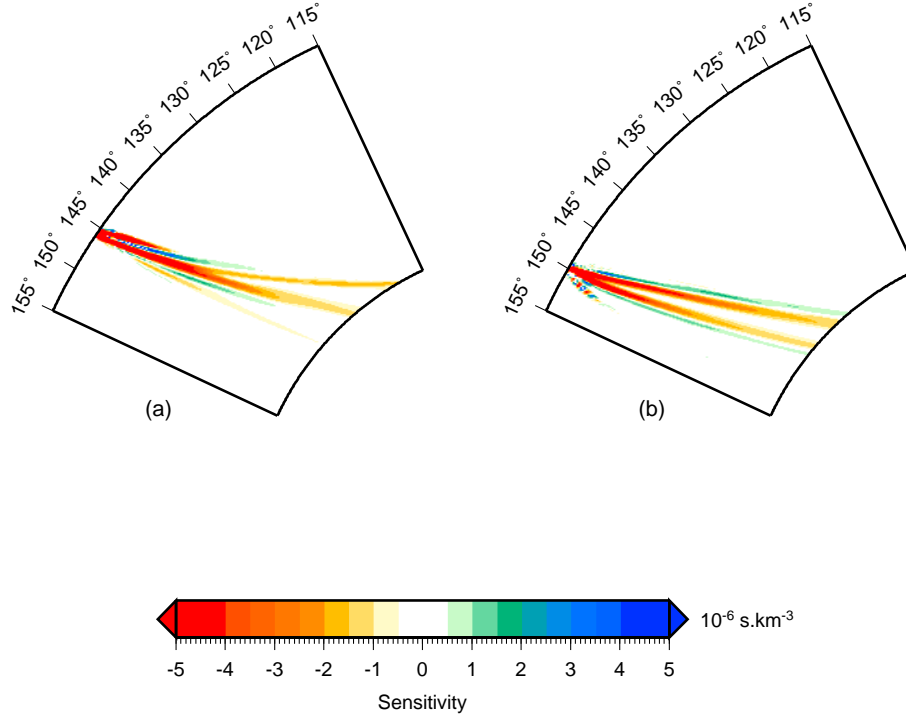


FIG. 5.5 – Section dans le manteau et dans le plan d'incidence du noyau  $K_\alpha$  pour la phase PKP(BC) avec une période dominante de 2.25 s et pour une distance épacentrale de  $145.5^\circ$  (a) et  $150^\circ$  (b).

La figure 5.6 représente les noyaux de sensibilité des ondes PKP(AB) dans le plan d'incidence. La phase de référence AB est généralement plus lente que les phases BC et DF. Par conséquent, ces dernières peuvent contribuer au noyau de la AB. Ainsi, la sensibilité des ondes AB à la CMB est distribuée sur près de 1000 km. Au voisinage de la triplication, les interférences sont fortes. Dans le manteau inférieur, l'amplitude de la sensibilité est faible mais s'étale sur près de 1000 km à la CMB. Il faut se rappeler que la phase AB est rétrograde, et donc quand la distance épacentrale augmente, l'incidence de l'onde est de plus en plus rasante à la CMB. Au delà du point B à la CMB, la phase PKP(DF) peut être diffusée. Mais cette dernière est bien trop rapide par rapport

à la PKP(AB) et n'entre donc pas dans la fenêtre de corrélation. D'autre part, pour des points diffractants situés dans la zone d'ombre, l'une des branches pourrait correspondre à une onde P diffractée à la CMB. La méthode utilisée dans cette thèse pour calculer les noyaux de sensibilité des ondes PKP, basée sur la théorie des rais, ne permet pas de modéliser les ondes diffractées. Les noyaux des PKP(AB) sont donc "tronqués" faute de pouvoir tenir compte de ces phases pour le calcul du noyau. La structure du noyau AB à la CMB sera donc toujours très affectée par la présence de la caustique et de la zone d'ombre. Prendre en compte les phases diffractées pour le calcul des noyaux de sensibilité est un enjeu important, mais nécessite la mise en oeuvre de méthodes plus sophistiquées comme la "full wave theory" (Richards, 1973). On peut envisager une combinaison des approximations de Born et Langer (Emery et al., 1999) ou encore des méthodes faisant appel aux éléments spectraux (Tromp et al., 2005). Dans le chapitre 6, nous proposerons une solution pour calculer l'amplitude des ondes diffractées et les noyaux de sensibilité à partir des travaux de Emery et al. (1999).

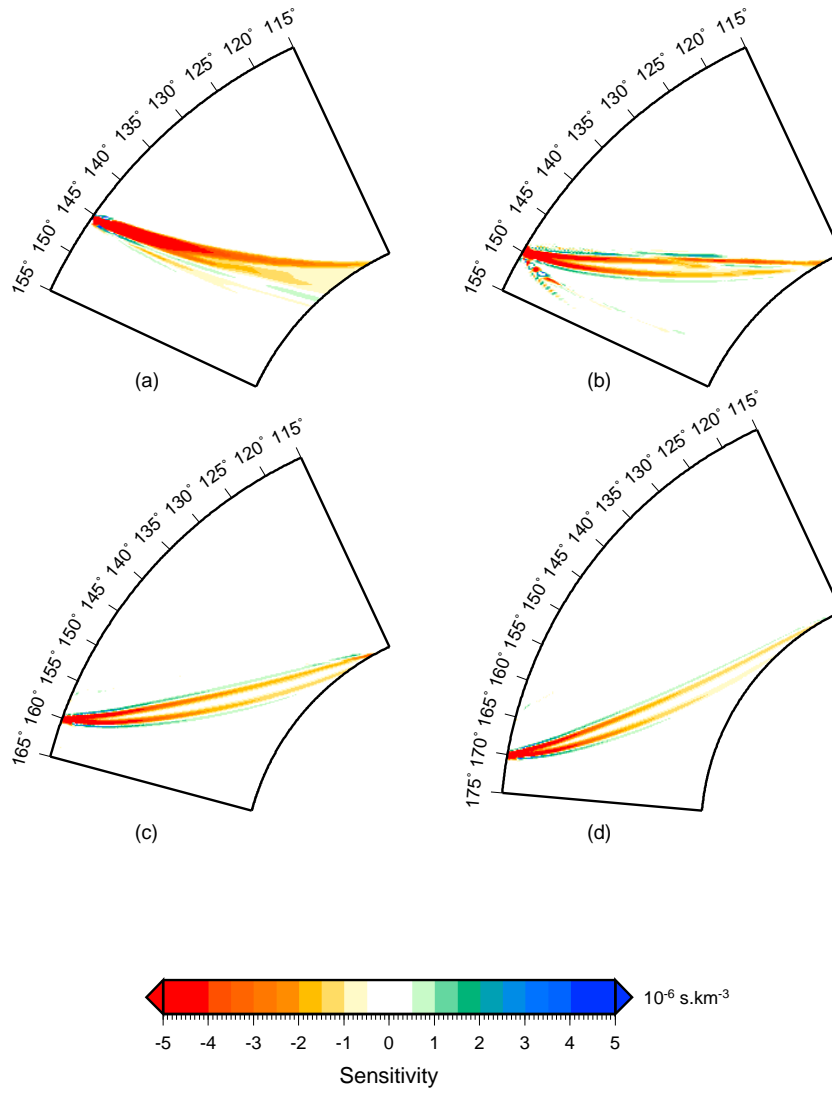


FIG. 5.6 – Section dans le manteau et dans le plan d’incidence du noyau de sensibilité  $K_\alpha$  pour la phases PKP(AB) avec une période dominante de 2.25 s. Le noyau a été calculé pour quatre distances épicentrales : 145.5° (a), 150° (b), 160° (c) et 170° (d).

### 5.3 Noyaux de sensibilité différentiels

Les temps différentiels AB-DF et BC-DF sont fréquemment utilisés pour étudier l’anisotropie de la graine. Ils permettent de réduire la contribution des hétérogénéités au voisinage de la source et du récepteur. Par ailleurs, les temps différentiels AB-BC sont également utilisés pour étudier les structures du manteau inférieur et de la couche D’.

### 5.3.1 Principe

#### Mesure du temps différentiel par cross-corrélation

On peut généraliser l'expression de la perturbation du temps de propagation absolu développée au chapitre 3, à la perturbation du temps différentiel entre deux phases enregistrées à une même station  $\Delta T = T_A - T_B$ . La perturbation du temps différentiel est mesurée par cross-corrélation des deux signaux observés  $u_A^{obs}(t) = u_A^0(t) + \delta u_A(t)$  et  $u_B^{obs}(t) = u_B^0(t) + \delta u_B(t)$  sur la fenêtre temporelle  $[t_1; t_2]$  :

$$Cor(\tau) = \int_{t_1}^{t_2} u_A^{obs}(t - \tau) u_B^{obs}(t) dt \quad (5.2)$$

On considère une perturbation d'ordre 1 de cette cross-corrélation :

$$Cor(\tau) = cor(\tau) + \delta cor(\tau) \quad (5.3)$$

avec

$$cor(\tau) = \int_{t_1}^{t_2} u_A^0(t - \tau) u_B^0(t) dt \quad (5.4)$$

$$\delta cor(\tau) = \int_{t_1}^{t_2} [u_A^0(t - \tau) \delta u_B(t) + \delta u_A(t - \tau) u_B^0(t)] dt \quad (5.5)$$

La perturbation du temps différentiel correspond au maximum de la corrélation  $Cor$ . On effectue un développement de Taylor au voisinage de cet extremum de corrélation

$$Cor(\tau + \delta\tau) = cor(\tau) + \delta\tau \partial_\tau cor(\tau) + \frac{1}{2} \delta\tau^2 \partial_\tau^2 cor(\tau) + \delta cor(\tau) + \delta\tau + \partial_\tau \delta cor(\tau) \quad (5.6)$$

$$= cor(\tau) + \frac{1}{2} \delta\tau^2 \partial_\tau^2 cor(\tau) + \delta cor(\tau) + \delta\tau + \partial_\tau \delta cor(\tau) \quad (5.7)$$

De façon similaire au cas du temps absolu, l'extremum de corrélation est :

$$\delta\tau = - \frac{\partial_\tau \delta cor(\tau)}{\partial_\tau^2 cor(\tau)} \quad (5.8)$$

En identifiant  $\delta\tau$  avec la perturbation du temps différentiel  $\delta(\Delta T)$  :

$$\delta(\Delta T) = \frac{\int_{t_1}^{t_2} [\dot{u}_A^0(t - \Delta T) \delta u_B(t) + \delta \dot{u}_A(t - \Delta T) u_B^0(t)] dt}{\int_{t_1}^{t_2} \ddot{u}_A(t - \Delta T) u_B^0(t) dt} \quad (5.9)$$

$$= \frac{\mathcal{Re} \int_0^\infty i\omega [u_A^{0*}(\omega) \delta u_B(\omega) + \delta u_A^*(\omega) u_B^0(\omega)] e^{i\omega \Delta T} d\omega}{\mathcal{Re} \int_0^\infty \omega^2 u_A^{0*}(\omega) u_B^0(\omega) e^{i\omega \Delta T} d\omega} \quad (5.10)$$

## Noyaux différentiels

L'expression (5.10) peut se réduire à une forme plus simple si on considère que l'indice de Maslov des phases A et B sont identiques, c'est-à-dire que les deux phases ont une forme d'onde identique lors de la mesure par cross-corrélation. En général, les indices de Maslov des phases considérées ne sont pas identiques comme par exemple la PKP(AB) et la PKP(DF), ou encore la P et la PP (Hung et al., 2000). Il est alors nécessaire de procéder à une égalisation des formes d'onde. En pratique, on effectue la transformée de Hilbert de l'une des deux phases. Par exemple, pour mesurer le temps de propagation différentiel entre la PKP(AB) et le PKP(BC), il faut prendre la transformée de Hilbert de la PKP(AB) et changer ainsi la polarité de l'onde avant d'effectuer la cross-corrélation (Choy et Richards, 1975). D'autre part, la phase PKP(DF) est fortement atténuée par sa trajectoire dans la graine induisant un élargissement du pulse. Il faut donc effectuer une correction d'atténuation avant de procéder à une mesure du temps par cross-corrélation.

On considère que la perturbation du champ de déplacement est identique pour les deux phases  $\delta u_A(\omega) = \delta u_B(\omega) = \delta u(\omega)$  et que  $M_A = M_B = M$ . Posons :

$$\begin{aligned} u_A(\omega) &= A\dot{s}(\omega) \exp(-i\omega T_A + M\pi/2) \\ u_B(\omega) &= B\dot{s}(\omega) \exp(-i\omega T_B + M\pi/2) \end{aligned} \quad (5.11)$$

alors le dénominateur de (5.10) s'écrit

$$\omega^2 u_A^{0*} u_B^0 \exp(i\omega \Delta T) = A \times B \omega^2 |\dot{s}(\omega)|^2 \quad (5.12)$$

et le numérateur devient

$$\begin{aligned} u_A^{0*}(\omega) \delta u_B(\omega) + \delta u_A^*(\omega) u_B^0(\omega) &= A\dot{s}^*(\omega) \exp(i\omega T_B - iM\pi/2) \delta u \\ &\quad + B\dot{s}(\omega) \exp(-i\omega T_A + iM\pi/2) \delta u^* \\ &= \frac{A}{B} u_B^* \delta u + \frac{B}{A} u_A \delta u^* \end{aligned} \quad (5.13)$$

La perturbation du temps différentiel  $\delta(\Delta T)$  s'écrit alors

$$\begin{aligned} \delta(\Delta T) &= \frac{\mathcal{Re} \int_0^{+\infty} i\omega u_B^* \delta u d\omega}{\mathcal{Re} \int_0^{+\infty} \omega^2 |\dot{s}(\omega)|^2 B^2 d\omega} + \frac{\mathcal{Re} \int_0^{+\infty} i\omega u_A \delta u^* d\omega}{\mathcal{Re} \int_0^{+\infty} \omega^2 |\dot{s}(\omega)|^2 A^2 d\omega} \\ &= \frac{\mathcal{Re} \int_0^{+\infty} i\omega u_B^* \delta u d\omega}{\int_0^{+\infty} \omega^2 |u_B^0(\omega)|^2 d\omega} + \frac{\mathcal{Re} \int_0^{+\infty} i\omega u_A \delta u^* d\omega}{\int_0^{+\infty} \omega^2 |u_A^0(\omega)|^2 d\omega} \end{aligned} \quad (5.14)$$



Sachant que  $\mathcal{Re}(iab^*) = \mathcal{Re}(-ia^*b)$  alors

$$\delta(\Delta T) = \frac{\mathcal{Re} \int_0^{+\infty} i\omega u_B^* \delta u d\omega}{\int_0^{+\infty} \omega^2 |u_B^0(\omega)|^2 d\omega} - \frac{\mathcal{Re} \int_0^{+\infty} i\omega u_A \delta u^* d\omega}{\int_0^{+\infty} i\omega^2 |u_A^0(\omega)|^2 d\omega} \quad (5.15)$$

Donc

$$\delta(\Delta T) = \int_V K^{B-A} dV = \int_V K^B dV - \int_V K^A dV \quad (5.16)$$

Ainsi, si les indices de Maslov des deux phases considérées sont identiques ( $M_A = M_B$ ), alors le noyau différentiel  $K^{A-B}$  correspond à la différence entre les noyaux associés à chacune des phases  $K^B - K^A$ .

### 5.3.2 Description des noyaux BC-DF, AB-DF, AB-BC

Tous les noyaux ont été calculés pour une fonction source correspondant à une dérivée seconde de gaussienne de période dominante de 2.25 s. La figure 5.7 représente les trois noyaux différentiels pour une distance épacentrale de  $150^\circ$  et une source en surface. A cette distance, les différentes phases PKP commencent à être correctement séparées temporellement et on pourra dégager l'effet des différentes contributions à la structure des noyaux.

La figure 5.7a montre le noyau différentiel BC-DF. A cette distance épacentrale le noyau de la DF est relativement simple. Par contre, la phase DF étant plus rapide que la phase BC, elle peut contribuer au noyau de la BC. Cependant cette contribution est pratiquement négligeable. À la CMB, la sensibilité du noyau différentiel s'étale sur environ 900 km. Dans le manteau supérieur, le noyau présente une alternance de zones de sensibilité positive et négative. Ainsi, une hétérogénéité de vitesse d'onde P avec une extension latérale de  $5^\circ$ , située sur le faisceau, ne devrait pratiquement pas perturber le temps différentiel BC-DF contrairement à des structures plus petites. Ce temps différentiel pourrait être sensible à des structures du manteau supérieur. Cependant, cette observation est fonction du contenu fréquentiel des ondes.

La figure 5.7b montre le noyau différentiel AB-DF. Pour des distances inférieures à  $120^\circ$ , on se trouve dans la zone d'ombre : seule une branche X-R (point diffractant - récepteur) correspondant à une onde P diffractée à la CMB pourrait contribuer au noyau de la PKP(AB). A la CMB, la structure en "banana-doughnut" de la PKP(AB) est fortement perturbée par la contribution de la PKP(BC). En effet, en bordure de la zone d'ombre,

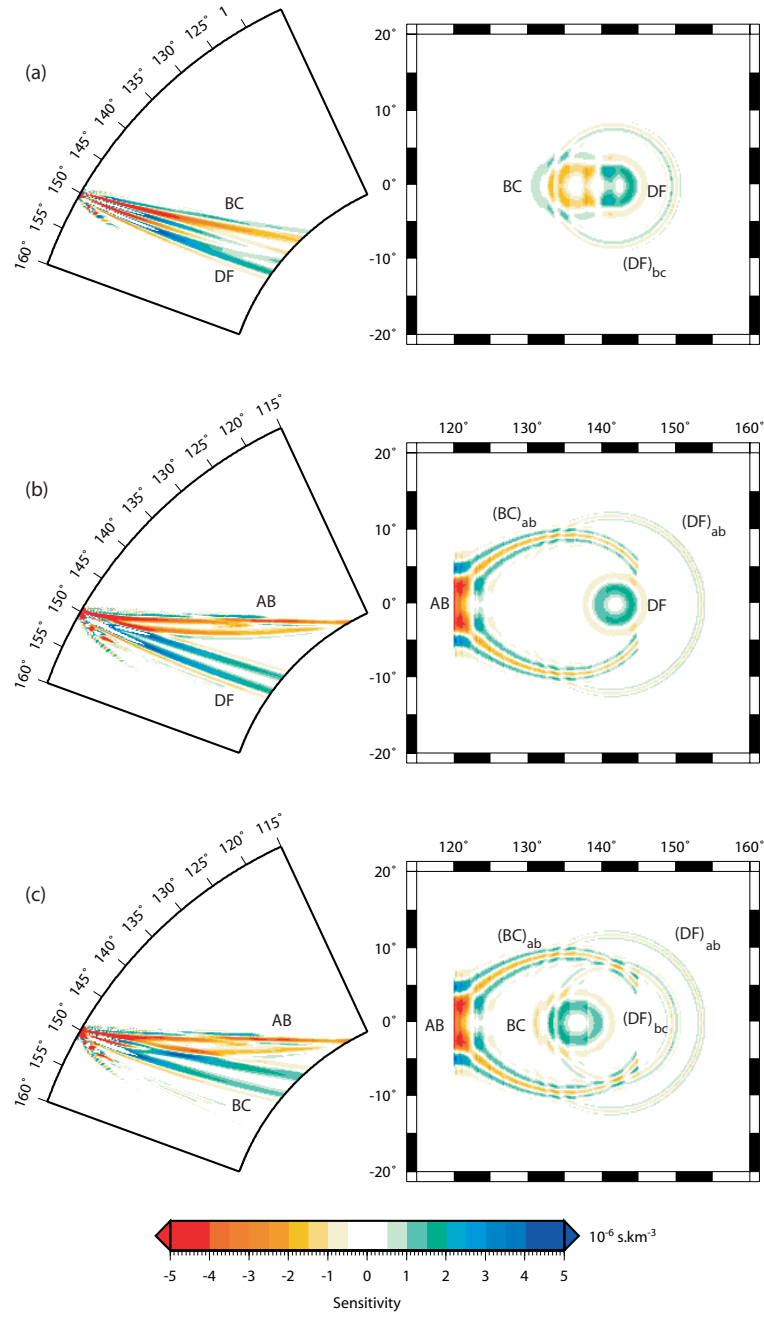


FIG. 5.7 – Noyaux différentiels BC-DF (haut), AB-DF (milieu) et AB-BC (bas) pour une distance épacentrale de  $150^\circ$ . Section dans le plan d'incidence (gauche) et à 50 km au-dessus de la CMB (droite). Pour une phase de référence donnée, on peut observer la contribution des autres phases. Par contre, les ondes diffractées à la CMB ne sont pas prises en compte. La notation  $(BC)_{ab}$  signale la contribution de la phase BC au noyau de la phase AB.

au voisinage du point B, les phases PKP(AB) et PKP(BC) ont des temps de propagation très proches. Par contre, la contribution de la PKP(DF) au noyau de la PKP(AB) est beaucoup moins significative. Par ailleurs, la contribution de la branche PKP(BC) s'interrompt abruptement vers  $145^\circ$ , ce qui correspond à la position de la caustique C à cette profondeur. Au delà de cette distance, seules des branches correspondant aux phases PKP(BC) diffractées à l'ICB sont susceptibles de contribuer au noyau de la AB. Cependant, les noyaux étant construits dans le cadre de la théorie de rai (via l'expression du tenseur de Green), il n'est pas possible de modéliser ces ondes diffractées. Ainsi, la sensibilité de ce noyau s'étale sur près de 1400 km à la base du manteau et présente une structure beaucoup plus complexe que ce que prévoit la théorie des rais. Les conséquences sur les résultats d'une tomographie du manteau inférieur pourraient être significatives.

Enfin, le noyau différentiel AB-BC (figure 5.7c) présente une structure proche de celle du noyau AB-DF. Cependant, ces deux phases ont des trajectoires plus proches si bien que la sensibilité est distribuée de façon un peu plus homogène.

Lorsque la distance épacentrale augmente, l'angle d'incidence de la PKP(AB) augmente si bien que la contribution de la PKP(AB) s'étale sur  $10$  à  $20^\circ$ . On observe toujours une forte interférence de la PKP(AB) avec la PKP(BC) pour des points diffractants situés au voisinage de la caustique B. Cependant, la zone de sensibilité fortement négative tend à disparaître quand la distance augmente (figure 5.8).

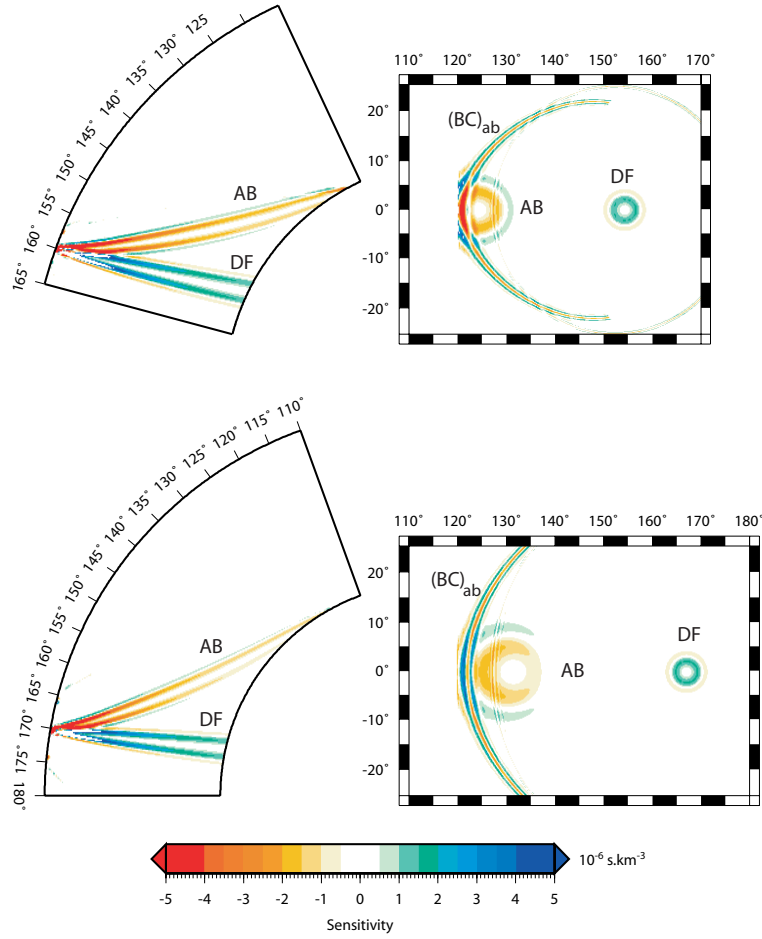


FIG. 5.8 – Noyaux différentiels PKP(AB)-PKP(DF) pour une distance épacentrale de 160° (haut) et de 170° (bas). Section dans le plan d'incidence (gauche) et à 50 km au-dessus de la CMB (droite).

## 5.4 Conclusions et perspectives

Les noyaux de sensibilité des phases PKP ne présentent pas une structure simple dite en "banana-doughnut" à toutes les distances épacentrales, en raison des fortes interférences entre les phases PKP, de la présence de la zone d'ombre et de la caustique. Même si les ondes PKP ont des périodes dominantes faibles, le volume de Fresnel est important. La structure des noyaux montre la complexité de l'échantillonnage du manteau inférieur par les ondes PKP. Cependant, ces noyaux ne prennent pas en compte la contribution possible des phases diffractées à la CMB et à l'ICB qui pourrait être importante. En effet, pour des distances proches de la caustique B, l'onde diffusée par des points diffractants dans la zone d'ombre serait constituée d'une branche diffractée à la CMB complétant ainsi le

noyau de la PKP(AB) qui est pour l’instant tronqué. Dans la zone d’ombre, on observe des ondes diffractées à la CMB et des précurseurs aux phases PKP engendrés par de la diffusion dans la couche D” ou à la CMB (Cleary et Haddon, 1972; Hedlin et al., 1997). L’incorporation des ondes diffractées dans le calcul des noyaux de sensibilité des PKP (plus particulièrement pour la phase PKP(AB)) semble nécessaire pour décrire correctement la distribution spatiale de la sensibilité de ces ondes.

Par ailleurs, Garcia et al. (2004) ont observé de fortes variations latérales des anomalies de temps de propagation des ondes PKP(AB) pour des distances épacentrales au voisinage de la triPLICATION (figure 5.9) suggérant l’existence d’un fort gradient de vitesse latéral dans la couche D” sur les trajets Fidji-Tonga vers l’Europe. Pour une distance épacentrale autour de  $150^\circ$ , une discontinuité séparant une anomalies lente d’une anomalies rapide, située à la limite entre une sensibilité positive et négative du noyau AB-BC, pourrait produire de fortes anomalies du temps de propagation. Un léger déplacement de cette discontinuité sur une distance inférieure à la zone de Fresnel pourrait engendrer une anomalie du temps de propagation soit positive soit négative. Ainsi, les noyaux de sensibilité différentiels des PKP pourraient prédire de fortes variations du temps différentiels sur des variations de distances épacentrales très faibles, c’est-à-dire pour des structures de quelques centaines de kilomètres dans la couche D”. L’utilisation des noyaux de sensibilité calculés sur une grille fine, couplée à une méthode performante et précise pour mesurer les temps de propagation différentiels et le contenu fréquentiel, devrait permettre de résoudre les petites structures dans la couche D” contrairement aux méthodes actuellement mise en oeuvre, sous réserve d’une couverture suffisante. Bien que le niveau d’hétérogénéité dans la couche D” soit encore source de débats, il sera peut-être nécessaire de calculer les noyaux de sensibilité dans un modèle de Terre 3-D pour mieux contraindre les fortes anomalies. De tels calculs, utilisant par exemple la méthode des éléments spectraux (Tromp et al., 2005), pour des ondes de petite période et à l’échelle globale, restent encore difficiles à mettre en oeuvre.

Enfin, compte tenu de la complexité de l’échantillonnage du manteau inférieur par les noyaux différentiels, on peut se poser des questions sur la pertinence de l’utilisation des temps différentiels pour étudier la structure de la graine. Bréger et al. (2000) ont montré que les temps différentiels AB-DF permettant d’étudier l’anisotropie de la graine dans pratiquement tout son volume sont fortement affectés par les structures du manteau inférieur et peuvent même expliquer les variations des résidus en fonction de l’angle du rai par rapport à l’axe de rotation de la Terre. La phase PKP(AB) échantillonne effectivement de façon assez complexe la couche D”, en particulier aux courtes distances épacentrales.

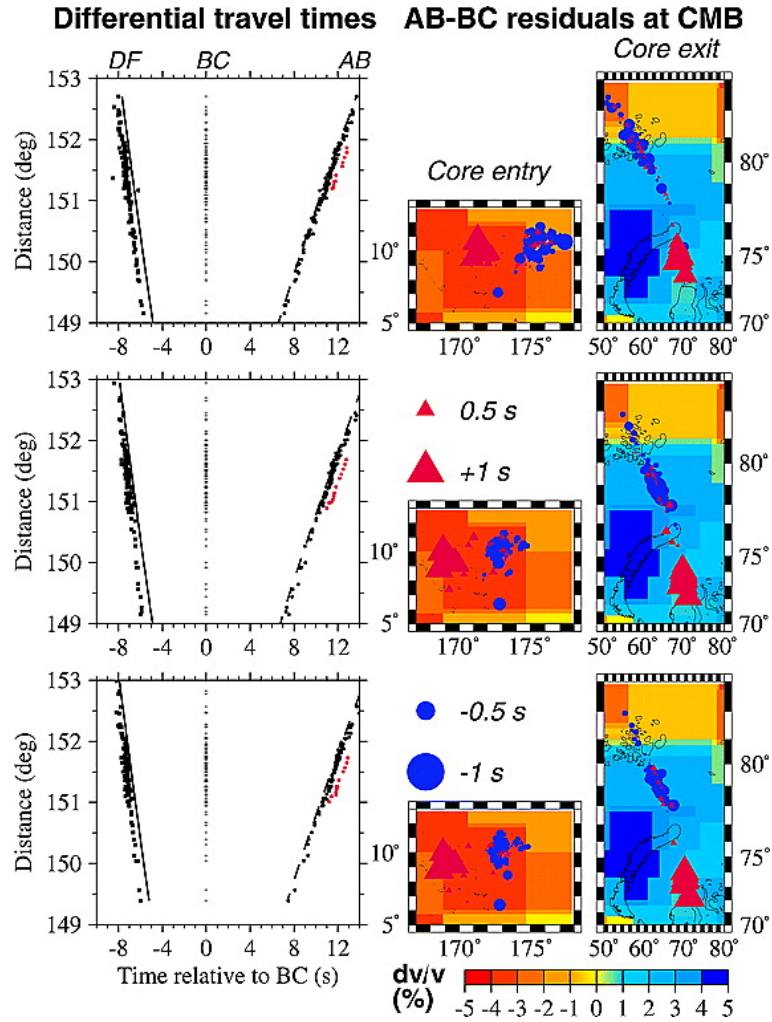


FIG. 5.9 – D'après Garcia et al. (2004). Variations du temps différentiels (à gauche) des ondes PKP (la phase PKP(BC) est la référence) correspondant à trois séismes (de haut en bas) situés dans la zone de subduction des Fidji-Tonga, et enregistrés en Europe Centrale. La ligne noire donne les temps différentiels BC-DF calculés dans le modèle ak135 et la ligne en pointillets le temps différentiel AB-BC. On observe des temps AB-BC anormalement lents (en rouge). Les temps différentiels BC-DF ne présentant pas la même anomalies ont en déduit alors que la phase AB est affectée par des hétérogénéités de vitesse dans le manteau. Les résidus AB-BC ont été représentés au niveau du point d'entrée et de sortie de la phase PKP(AB), surimposés au modèle de vitesse en onde P de Bijwaard et al. (1998). Pour une faible variation de la position du point d'entrée ou de sortie, on observe une forte variation des résidus de temps différentiels AB-BC. De telles variations des résidus des PKP(AB) avaient été également observées par Luo et al. (2001) pour des séismes des Fidji-Tonga enregistrés en Espagne.

Par ailleurs, des variations importantes des résidus BC-DF ont été observées à l'échelle de seulement quelques centaines de kilomètres (Bréger et al., 1999). Cependant, ces données ne permettent pas de clairement définir si ces variations sont dues à de fortes hétérogénéités dans la couche D'', à une structure plus complexe au sommet de la graine, ou bien encore dans la lithosphère. En effet, à courte distance épicentrale, ces temps différentiels permettent de dégager la structure supérieure de la graine : épaisseur de la couche isotrope, atténuation, anisotropie... Nous avons vu qu'il n'existe pas de consensus général sur la structure fine de la graine en particulier dans ces 400 premiers kilomètres. On peut donc s'interroger sur l'ampleur de la contribution des hétérogénéités de la couche D'' aux signaux associés généralement à la graine compte-tenu de la complexité des noyaux de sensibilité différentiels des phases PKP.

L'utilisation de ces noyaux, associés à ceux d'autres phases du manteau, permettra peut être d'augmenter de façon significative la résolution des images tomographiques du manteau. Les ondes les plus sensibles à la structure de la couche D'' présentent des incidences très rasantes à la CMB comme les phases PKP(AB). On a pu constater que la théorie des rais n'était pas en mesure de décrire complètement la sensibilité de ces ondes au voisinage de la CMB. Aussi, la contribution des ondes diffractées est probablement significative dans la distribution de la sensibilité des phases PKP(AB). Par ailleurs, les phases  $P_{diff}$  et  $S_{diff}$  sont des phases très intéressantes pour étudier la couche D''. Si on souhaite améliorer la résolution des images tomographiques du manteau inférieur, il semble indispensable de tenir compte des phases PKP et  $P_{diff}$  (Karason et van der Hilst, 2001) mais aussi de la répartition spatiale de leur sensibilité via les noyaux de sensibilité. Dans le chapitre suivant, nous développerons les éléments théoriques et numériques que nous proposons pour construire les noyaux de sensibilité des ondes diffractées.

# Chapitre 6

## Modélisation de la diffusion des ondes diffractées

Les ondes diffractées sont des phases intéressantes pour étudier la CMB et la couche D". Etant donné la longueur de leur trajectoire dans le manteau inférieur, elles sont très sensibles aux structures qui se trouvent à la base du manteau et ont une très bonne couverture de la CMB. Par ailleurs, ces phases permettent d'échantillonner des régions qui ne sont pas accessibles par les autres ondes (Wyssession, 1996). Enfin, elles apportent des observations dans des gammes de fréquences et de longueur d'onde qui ne sont pas couvertes par les autres phases (Valenzuela et Wyssession, 1998). L'étude des ondes diffractées apportent ainsi des contraintes sur les propriétés de la couche D", telles que les variations latérales de vitesses et le gradient de vitesse dans la couche D" (e.g., Doornbos et Mondt, 1979b; Souriau et Poupinet, 1994; Wyssession, 1996), l'anisotropie sismique (e.g., Vinnik et al., 1989; Maupin, 1994; Kendall et Silver, 1996), l'atténuation (e.g., Doornbos et Mondt, 1979a; Alexander et Phinney, 1966) ... Utiliser les noyaux de sensibilité des ondes  $P_{diff}$  permettrait ainsi d'améliorer la résolution des images tomographiques dans le manteau inférieur. Cependant, la méthode utilisée dans les chapitres précédents pour calculer les noyaux de sensibilité fait appel à la théorie des rais qui ne permet pas de décrire l'amplitude des ondes diffractées à la CMB.

Il existe pourtant une autre approche pour modéliser la propagation des ondes et donc calculer les noyaux de sensibilité : la sommation des modes propres (e.g., Li et Tanimoto, 1993; Tanimoto, 1995; Li et Romanowicz, 1995). Zhao et al. (2000) ont mis en oeuvre cette théorie pour calculer le noyau de sensibilité en temps de propagation pour une onde SH diffractée en sommant des modes toroïdaux. Mais dans le cas d'une onde P diffractée, il faudrait considérer les modes sphéroïdaux à haute fréquence, ce qui s'avère beaucoup



plus complexe et surtout beaucoup plus coûteux en temps de calcul.

Cependant, on peut modéliser la diffraction, l'interaction entre une onde et une discontinuité, à l'aide la théorie développée par Richards (1973) et appelée "full wave theory" ou encore "approximation de Langer". Cette approximation est une adaptation à fréquence finie de la théorie haute fréquence WKBJ. Cette théorie permet de décrire l'amplitude d'une onde au niveau de son point bas quand ce dernier se trouve au voisinage d'une discontinuité comme la CMB. Elle a été utilisée par exemple pour l'étude des ondes SmKS par Choy (1977), des ondes PKnIKP par Cormier et Richards (1977) ou encore pour les ondes P et S diffractées (Doornbos et Mondt, 1979a,b; Doornbos, 1981; Maupin, 1994; Emery et al., 1999). La principale différence avec la théorie WKBJ est la dépendance en fréquence des coefficients de réflexion/transmission. Ces coefficients prennent en compte à la fois les effets de courbure des interfaces et les effets de tunneling aux incidences rasantes (Richards, 1973, 1976). Cependant, l'approximation de Langer ne sera valide que s'il existe un seul point bas pour chaque type d'onde dans une couche.

Pour calculer les noyaux de sensibilité, il faut donc combiner l'approximation de Langer pour décrire la diffraction et l'approximation de Born pour décrire la diffusion par une hétérogénéité. Ce travail a déjà été effectué par Emery et al. (1999) pour décrire la diffusion, par des anomalies de densité et de vitesse, des ondes SV et SH diffractées à la CMB, en tenant compte du couplage entre les deux composantes. Dans ce chapitre, on se propose de reprendre les développements de Emery et al. (1999) et de les adapter au cas des ondes P diffractées afin de proposer des résultats préliminaires concernant le calcul des noyaux de sensibilité pour les ondes P diffractées.

Dans un premier temps, nous allons examiner les principaux éléments de l'approximation de Langer que nous utiliserons pour dériver l'expression de l'amplitude du champ de déplacement. Nous combinerons ensuite l'approximation de Langer et l'approximation de Born afin de modéliser la diffusion des ondes P diffractées à la CMB. Nous présenterons les résultats préliminaires de calcul des noyaux de sensibilité des ondes P diffractées à la CMB.

## 6.1 Equation du mouvement dans une Terre sphérique

On cherche à résoudre l'équation du mouvement dans le domaine fréquentiel pour une Terre sphérique, sans tenir compte de la rotation et des effets de gravitation. On choisit un système de coordonnées tel que la source coïncide avec un pôle et tel que le grand cercle entre la source et le récepteur se trouve sur un méridien. On peut alors décomposer

les vecteurs déplacement, contrainte radiale et excitation à la source en harmoniques sphériques :

$$\mathbf{u} = \sum_0^l \sum_{m=-l}^l UY_l^m \mathbf{r} + VY_l^m \boldsymbol{\theta} + WY_l^m \boldsymbol{\phi} \quad (6.1)$$

$$\frac{\boldsymbol{\tau}}{\omega} = \sum_0^l \sum_{m=-l}^l RY_l^m \mathbf{r} + SY_l^m \boldsymbol{\theta} + TY_l^m \boldsymbol{\phi} \quad (6.2)$$

$$\mathbf{f} = \sum_0^l \sum_{m=-l}^l FY_l^m \mathbf{r} + GY_l^m \boldsymbol{\theta} + HY_l^m \boldsymbol{\phi} \quad (6.3)$$

Remarque :

À haute fréquence, les vecteurs harmoniques  $\mathbf{R}_l^m$ ,  $\mathbf{S}_l^m$  et  $\mathbf{T}_l^m$  s'alignent avec les vecteurs unitaires  $(\mathbf{r}, \boldsymbol{\theta}, -\boldsymbol{\phi})$  du système de coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_l^m &= \mathbf{r} Y_l^m \\ \mathbf{S}_l^m &= \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \left[ \boldsymbol{\theta} \partial_\theta + \boldsymbol{\phi} (\sin \theta)^{-1} \partial_\phi \right] Y_l^m \\ \mathbf{T}_l^m &= \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \left[ \boldsymbol{\theta} (\sin \theta)^{-1} \partial_\phi - \boldsymbol{\phi} \partial_\theta \right] Y_l^m \end{aligned}$$

Si on ne conserve que les termes traduisant la propagation depuis la source, la forme asymptotique de  $Y_l^m$  s'écrit :

$$Y_l^m(\theta, \phi) = (-1)^m \exp(im\phi) Y_l(\theta) \quad (6.4)$$

avec

$$Y_l(\theta) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} Q_l^{(2)}(\cos \theta) \quad (6.5)$$

où  $Q_l^{(2)}$  est la fonction de Legendre

$$Q_l^{(2)}(\cos \theta) = \frac{\exp[i(l+1/2)\theta - i\pi/4]}{\sqrt{2\pi l \sin \theta}} \quad (6.6)$$

Dans le domaine fréquentiel, le terme  $l+1/2$  correspond à  $\omega p$ . Ainsi, une dérivée par rapport à  $\theta$  fait apparaître un facteur en  $i\omega p$ , contrairement à une dérivée par rapport à  $\phi$ . Le système à résoudre se réduit à un système pour les composantes harmoniques, et s'écrit (Aki et Richards, 1980; Chapman et Orcutt, 1985) :

$$\frac{d}{dr} \mathbf{b}_l^m = \omega \mathbf{A}(r) \mathbf{b}_l^m - \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_l^m \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

avec  $\mathbf{b}_l^m = (U, V, W, R, S, T)^T$  et  $\mathbf{f}_l^m = (F, G, H)^T$ . La matrice  $\mathbf{A}(r)$  est une matrice  $6 \times 6$  qui est indépendante de la fréquence  $\omega$  mais également de  $m$ . La solution de l'équation homogène, sans terme de forçage, est donc indépendante de  $m$ . On peut alors poser

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \frac{r}{\omega} \end{pmatrix} = \sum_l \mathbf{b}_l Y_l(\theta) \quad (6.8)$$

avec

$$\mathbf{b}_l = \sum_m (-1)^m \mathbf{b}_l^m \exp im\phi \quad (6.9)$$

Pour une source ponctuelle, l'équation différentielle à laquelle obéit  $\mathbf{b}_l$  est

$$\frac{d}{dr} \mathbf{b}_l = \omega \mathbf{A}(r) \mathbf{b}_l - \frac{1}{\omega r_S^2} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_l \end{pmatrix} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \quad (6.10)$$

Dans les paragraphes suivants, on n'écrira plus l'indice  $l$  pour alléger les écritures.

## 6.2 L'approximation de Langer

Lorsqu'on étudie les solutions hautes fréquences du système (6.10), on développe en série par rapport à  $\omega$  la matrice  $\mathbf{A}(r)$  qui est caractéristique du milieu de propagation (Chapman et Orcutt, 1985) :

$$\mathbf{A}(r) = \sum_{k=0} \frac{\mathbf{A}^{(k)}(r)}{\omega^k} \quad (6.11)$$

Pour les hautes fréquences le terme le plus important est  $\mathbf{A}^{(0)}$  qui pour le cas P-SV s'écrit (Maupin, 1994) :

$$\mathbf{A}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{ip}{r} \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} & \frac{1}{\lambda+2\mu} & 0 \\ -\frac{ip}{r} & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} \\ -\rho & 0 & 0 & -\frac{ip}{r} \\ 0 & -\rho + \frac{p^2}{r^2} \frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+\mu} & -\frac{ip}{r} \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} & 0 \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

avec  $r$  le rayon,  $\omega$  la fréquence angulaire,  $\lambda$  et  $\mu$  les coefficients de Lamé, et  $p$  le paramètre de rai.

---

Remarque : Attention, les conventions choisies ici sont différentes de celles de Aki et Richards (1980) ou Chapman et Orcutt (1985). En effet, nous avons décomposé le vecteur

déplacement/contrainte sur les vecteurs unitaires sphériques  $\mathbf{r}$ ,  $\boldsymbol{\theta}$  et  $\boldsymbol{\phi}$  plutôt que sur les vecteurs harmoniques  $\mathbf{R}_l^m$ ,  $\mathbf{S}_l^m$  et  $\mathbf{T}_l^m$ , si bien qu'il existe des termes complexes dans la matrice  $\mathbf{A}$  (Kennett, 2001, chap. 12). On passe de nos conventions à celles de Aki et Richards (1980) ou Chapman et Orcutt (1985) en utilisant les relations :

$$\begin{aligned} U^{Aki} &= U \\ V^{Aki} &= -iV \\ R^{Aki} &= R \\ S^{Aki} &= -iS \end{aligned}$$

Dans ce cas la matrice  $\mathbf{A}^{(0)}$  s'écrit (Chapman et Orcutt, 1985)

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{p}{r} \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} & \frac{1}{\lambda+2\mu} & 0 \\ -\frac{p}{r} & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} \\ -\rho & 0 & 0 & \frac{p}{r} \\ 0 & -\rho + \frac{p^2}{r^2} \frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} & -\frac{p}{r} \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} & 0 \end{bmatrix}$$

En l'absence de force, la solution de l'équation homogène est  $\mathbf{b} = \mathbf{D}\mathbf{\Lambda}\mathbf{a}$ . La matrice  $\mathbf{D}$  décrit l'amplitude du déplacement et de la contrainte dans une couche (vecteurs propres de  $\mathbf{A}$ ) et  $\mathbf{\Lambda}$  est une matrice diagonale qui contient les fonctions d'ondes verticales pour les ondes P, SV et SH.  $\mathbf{a}$  est un vecteur contenant l'amplitude de l'onde montante et de l'onde descendante. En effet, dans l'approximation de Langer, les ondes P et S se propagent indépendamment sauf au niveau des discontinuités, en gardant une amplitude constante dans chaque couche. Si on ne s'intéresse qu'aux ondes P et SV, la matrice  $\mathbf{\Lambda}$  est définie à partir des fonctions d'ondes verticales montantes  $(\dot{\pi}, \dot{\sigma})$  et descendantes  $(\dot{\pi}, \dot{\sigma})$ , pour les ondes P et S respectivement :

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \dot{\pi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\pi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dot{\sigma} \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

$$\mathbf{\Lambda}^{-1} = \left( -i \frac{\omega^2 r^2}{2\rho_S} \right) \begin{bmatrix} \dot{\pi}/\alpha_S^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\sigma}/\beta_S^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\pi}/\alpha_S^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dot{\sigma}/\beta_S^3 \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

Dans l'approximation de Langer, les fonctions d'ondes verticales peuvent être écrites en terme de fonction d'Airy :

$$\begin{bmatrix} \dot{\pi} \\ \dot{\pi} \end{bmatrix} = \left( \frac{\rho_S}{\rho} \right)^{1/2} \frac{\alpha_S^{3/2}}{\alpha} \frac{2}{\omega r} \left( \frac{\pi}{\chi} \right)^{1/2} z^{1/4} \begin{bmatrix} Ai(-e^{-i2\pi/3}z)e^{+i\pi/3} \\ Ai(-e^{+i2\pi/3}z)e^{-i\pi/3} \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

avec

$$z = \left( \frac{3}{2} \omega \tau \right)^{2/3} \quad (6.16)$$

$$\tau = \int_{r_{bas}}^r \chi dr \quad (6.17)$$

$$\chi = \left( \frac{1}{\alpha^2} - \frac{p^2}{r^2} \right)^{1/2} \quad (6.18)$$

Dans l'approximation WKBJ, les fonctions d'onde verticales deviennent

$$\begin{bmatrix} \dot{\pi} \\ \dot{\pi} \end{bmatrix} = \left( \frac{\rho_S}{\rho} \right)^{1/2} \frac{\alpha_S^{3/2}}{\alpha} \frac{1}{\omega r} \frac{1}{\chi^{1/2}} \begin{bmatrix} e^{+i\omega\tau} e^{-i\pi/4} \\ e^{-i\omega\tau} e^{+i\pi/4} \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

On remplace  $\alpha$  et  $\alpha_S$  par  $\beta$  et  $\beta_S$  pour obtenir les fonctions d'ondes verticales pour les ondes SV.  $\chi$  correspond à la lenteur verticale dans l'approximation de WKBJ,  $r_{bas}$  est le rayon au point bas du rai. La source est caractérisée par  $\rho_S$ ,  $\alpha_S$  et  $\beta_S$  et le récepteur par  $\rho$ ,  $\alpha$  et  $\beta$ . Les fonctions de Airy permettent de passer d'un régime de propagation à un régime évanescent sans présenter de singularité au niveau du point bas du rai, contrairement à l'approximation WKBJ. Quand on est loin de la profondeur du point bas du rai, l'approximation de Langer et l'approximation WKBJ se rejoignent, ce qui correspond à des valeurs de  $\omega\tau$  grandes.

On peut construire la matrice  $\mathbf{D}$  telle que les deux premières colonnes correspondent aux phases descendantes  $P^\downarrow$  et  $SV^\downarrow$  et les deux dernières aux phases montantes  $P^\uparrow$  et  $SV^\uparrow$  en introduisant les lenteurs verticales généralisée montantes  $(\acute{\xi}, \acute{\eta})$  et descendantes  $(\grave{\xi}, \grave{\eta})$  pour les ondes P et S respectivement :

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -\alpha\grave{\xi} & \beta p/r & \alpha\acute{\xi} & \beta p/r \\ \alpha p/r & \beta\grave{\eta} & \alpha p/r & -\beta\acute{\eta} \\ i\rho\alpha A & -2i\rho\beta B\grave{\eta} & i\rho\alpha A & 2i\rho\beta B\acute{\eta} \\ -2i\rho\alpha B\grave{\xi} & -i\rho\beta A & 2i\rho\alpha B\acute{\xi} & -i\rho\beta A \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} -i\rho\alpha A & 2i\rho\alpha B\acute{\xi} & \alpha\acute{\xi} & -\alpha p/r \\ 2i\rho\beta B\acute{\eta} & i\rho\beta A & -\beta p/r & -\beta\acute{\eta} \\ i\rho\alpha A & 2i\rho\alpha B\grave{\xi} & \alpha\grave{\xi} & \alpha p/r \\ 2i\rho\beta B\grave{\eta} & -i\rho\beta A & \beta p/r & -\beta\grave{\eta} \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

avec  $A = 1 - 2\beta^2(p^2/r^2)$  et  $B = \beta^2(p/r)$ . Les deux premières lignes de  $\mathbf{D}^{-1}$  correspondent aux ondes P et SV descendantes et les deux suivantes aux ondes montantes. Les lenteurs verticales généralisées sont définies de la façon suivante :

$$\dot{\xi} = \frac{1}{i\omega\dot{\pi}} \frac{d\dot{\pi}}{dr}; \quad \dot{\xi} = \frac{1}{-i\omega\dot{\pi}} \frac{d\dot{\pi}}{dr} \quad (6.22)$$

$$\dot{\eta} = \frac{1}{i\omega\dot{\sigma}} \frac{d\dot{\sigma}}{dr}; \quad \dot{\eta} = \frac{1}{-i\omega\dot{\sigma}} \frac{d\dot{\sigma}}{dr} \quad (6.23)$$

#### Remarque : Construction de la matrice $\mathbf{D}$

Il faut se donner des conventions pour écrire la matrice  $\mathbf{D}$ . Premièrement, d'après les conventions décrites au paragraphe précédent, la matrice  $\mathbf{D}$  est obtenue à partir de la matrice  $\mathbf{E}$  donnée par Aki et Richards (1980, Eq. 9.59, vol 2) en multipliant la première ligne de  $\mathbf{E}$  par le facteur  $-i$  et en divisant la troisième ligne par  $-i$ . D'autre part, nous avons pour l'instant considéré une base de fonctions d'ondes se propageant soit vers le haut soit vers le bas. On peut utiliser une autre base de fonctions dans laquelle on remplace l'onde descendante par une onde stationnaire ( $\check{\pi} = \dot{\pi} + \ddot{\pi}$ ) dont l'amplitude décroît sous le point bas (Cormier, 1980)

$$\check{\pi} = \dot{\pi} + \ddot{\pi} = \left(\frac{\rho_S}{\rho}\right)^{1/2} \frac{\alpha_S^{3/2}}{\alpha} \frac{2}{\omega r} \left(\frac{\pi}{\chi}\right)^{1/2} z^{1/4} Ai(-z)$$

On obtient bien cette onde stationnaire pour les ondes P si on additionne les colonnes 1 et 3 de  $\mathbf{E}$  mais ce n'est pas le cas pour la partie SV quand on additionne les colonnes 2 et 4. Pour construire  $\mathbf{D}$ , on a donc également choisi de multiplier par  $(-1)$  la colonne 4 de  $\mathbf{E}$ .

Si on utilise la base  $(\dot{\pi}, \check{\pi}, \dot{\sigma}, \check{\sigma})$ , les expressions de  $\mathbf{D}$  et de  $\mathbf{D}^{-1}$  sont identiques, en changeant seulement  $(\dot{\pi}, \dot{\sigma})$  par  $(\check{\pi}, \check{\sigma})$ . D'autre part, on a la même normalisation de  $\mathbf{\Lambda}^{-1}$ , qu'on utilise l'onde descendante ou l'onde stationnaire.

Cette onde stationnaire a été utilisée pour modéliser les réflexions multiples à la CMB des ondes SKmS Choy (1977), les réflexions multiples à l'ICB des ondes PKImKP par Cormier et Richards (1977) et pour modéliser les ondes diffractées par Emery et al. (1999).

## 6.3 Modélisation d'une onde P

Dans le cadre de l'approximation WKBJ, on peut montrer que la transformée de Fourier du champ de déplacement pour une distance épacentrale  $\Delta_{SR}$  est donnée par

$$u(\omega, \Delta_{SR}) = \int_{\Gamma} f(p, \omega) \exp^{i\omega J(p)} dp \quad (6.24)$$

avec  $\Gamma$  un contour complexe. Richards (1973) a décrit les avantages de résoudre l'équation du mouvement dans le domaine fréquentiel en effectuant une intégrale le long d'un contour  $\Gamma$  dans le plan des paramètres de rais complexes et ensuite de procéder à une transformée de Fourier inverse du spectre ainsi obtenu. Cette méthode offre un certain nombre d'avantages :

- contrairement à la méthode de Cagniard, le contour  $\Gamma$  peut être fixé pour une certaine gamme de distance épacentrale
- cette méthode est applicable à des ondes qui ont un point bas
- le contour  $\Gamma$  permet de prendre en compte des effets qui n'étaient pas modélisés par la théorie des rais, comme la diffraction
- les effets d'atténuation pourront être facilement pris en compte en définissant des profils de vitesse complexe

Ainsi, à partir du formalisme développé dans les paragraphes précédents, nous allons voir comment modéliser les ondes P, PKP et Pdiff. Dans ce paragraphe, nous allons détailler la procédure pour modéliser ces ondes, à savoir l'expression des composantes du champ de déplacement en fonction des éléments des matrices  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{\Lambda}$ . La dernière étape consiste à déterminer le contour d'intégration adéquat pour l'onde en fonction de la gamme de distances épacentrales désirée et à choisir les bases de fonction pour calculer les coefficients de réflexion-transmission.

### 6.3.1 Composante radiale du champ de déplacement d'une onde P

Suivant le formalisme des propagateurs, les éléments de base que l'on utilisera sont :

- Les matrices  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{\Lambda}$  relient le vecteur déplacement-contrainte à l'amplitude des ondes montantes et descendantes à chaque profondeur :

$$\mathbf{b}(r_2) = \mathbf{D}(r_2)\mathbf{\Lambda}(r_2) \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{a}}(r_2) \\ \dot{\mathbf{a}}(r_2) \end{pmatrix} \quad (6.25)$$

- Dans une couche, le vecteur déplacement-contrainte au point  $r_2$  est fonction du vecteur déplacement contrainte au point  $r_1$  :

$$\mathbf{b}(r_2) = \mathbf{P}(r_2, r_1)\mathbf{b}(r_1) = \mathbf{D}(r_2)\mathbf{\Lambda}(r_2)\mathbf{D}^{-1}(r_1)\mathbf{\Lambda}^{-1}(r_1)\mathbf{b}(r_1) \quad (6.26)$$

- Si les bases de fonctions propres sont identiques au sommet et à la base de la couche, alors l'amplitude  $\mathbf{a}$  est constante dans la couche sinon :

$$\mathbf{a}(r_2) = \mathbf{S}(r_2, r_1)\mathbf{a}(r_1) = \mathbf{\Lambda}^{-1}(r_2)\mathbf{D}^{-1}(r_2)\mathbf{D}(r_1)\mathbf{\Lambda}(r_1) \quad (6.27)$$

- Il y a continuité du vecteur déplacement/contrainte à une discontinuité :  $\mathbf{b}(r+) = \mathbf{b}(r-)$  (avec + au-dessus de la discontinuité et – au dessous).

On considère une onde qui est descendante à la source ( $r_S$ ) et montante au récepteur ( $r$ ). La source se traduit par une discontinuité du vecteur déplacement-contrainte  $\Delta\mathbf{b}$ . On définit  $\mathbf{b}(r_N)$ , le vecteur déplacement-contrainte dans la couche N située au dessous de la source. L'expression de  $\mathbf{b}(r)$  est alors :

$$\mathbf{b}(r) = \mathbf{P}(r, r_S) [\Delta\mathbf{b} + \mathbf{P}(r_S, r_N)\mathbf{b}(r_N)] \quad (6.28)$$

De façon générale, une source se comporte comme une discontinuité de traction associée à une discontinuité d'amplitude (Kennett, 2001) (en notant  $\mathbf{A} = \Lambda\mathbf{a}$ )

$$\begin{pmatrix} -\dot{\mathbf{A}}(r_S) \\ \dot{\mathbf{A}}(r_S) \end{pmatrix} = \mathbf{D}^{-1}(r_S)\Delta\mathbf{b} = \mathbf{D}^{-1}(r_S) \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{F} \end{pmatrix} \quad (6.29)$$

avec

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\omega r_S^2} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \mathbf{f}_l \quad (6.30)$$

On obtient donc un système de deux équations à trois inconnues  $\dot{\mathbf{a}}(r_N), \dot{\mathbf{a}}(r_N)$  et  $\dot{\mathbf{A}}(r)$ .

$$\mathbf{D}(r) \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{A}}(r) \end{bmatrix} = \mathbf{D}(r) (\Lambda(r)\Lambda^{-1}(r_S)) \left\{ \begin{bmatrix} -\dot{\mathbf{A}}(r_S) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \Lambda(r_S) \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{a}}(r_N) \\ \dot{\mathbf{a}}(r_N) \end{bmatrix} \right\} \quad (6.31)$$

En plus de ce système d'équations, on suppose qu'il existe une relation linéaire entre l'onde montante et l'onde descendante telle que

$$\dot{\mathbf{a}}(r_N) = \mathbf{R}\dot{\mathbf{a}}(r_N) \quad (6.32)$$

En présence d'une discontinuité, la matrice  $\mathbf{R}$  correspond à la matrice des coefficients de réflexion-transmission. En l'absence de discontinuité au voisinage du point le plus bas du rai,  $\mathbf{R} = \mathbf{I}_2$ . Pour la suite du raisonnement, on ne considèrera que les ondes P et donc les termes correspondant dans les matrices  $\mathbf{D}$ ,  $\Lambda$  et  $\mathbf{R}$ . On obtient alors que le déplacement au récepteur s'écrit

$$\mathbf{b}(r) = \left( \frac{-i\omega^2 r_S^2}{2\rho_S \alpha_S^3} \right) \dot{\pi}(r_S) \dot{\pi}(r) \begin{bmatrix} \alpha(r) \dot{\xi}(r) \\ \alpha(r) (p/r) \end{bmatrix} R^P \dot{A}(r_S) \quad (6.33)$$

Il s'agit maintenant de choisir un type de source. Une source peut être représentée en terme d'une force  $\mathbf{e}$  et/ou d'un tenseur de moment  $\mathbf{M}$ , si bien que la force équivalente du système s'écrit :

$$f_j = e_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_S) - \partial_k (M_{jk} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_S)) \quad (6.34)$$



La décomposition en harmonique sphérique montre que cette force possède une dépendance en  $\delta(r - r_S)$  et  $\delta'(r - r_S)$  si bien qu'on peut l'écrire (Kennett, 1983)

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_1\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_S) + \mathbf{f}_2\delta'(\mathbf{r} - \mathbf{r}_S) \quad (6.35)$$

Si on cherche à éliminer le terme contenant la dérivée du dirac, on peut montrer que la discontinuité de vecteur déplacement-contrainte en présence d'un moment à la source présente à la fois une discontinuité de traction et de déplacement (Kennett, 1983)

$$\Delta\mathbf{b} = \mathbf{f}_1 + \omega \mathbf{A}\mathbf{f}_2 \quad (6.36)$$

Donc, si on considère une source de type explosive (avec seulement un moment  $m(\omega)$ ),  $\Delta\mathbf{b}(r_S)$  a la forme suivante

$$\Delta\mathbf{b}(r_S) = \frac{1}{\omega r_S^2} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \begin{pmatrix} \omega m(\omega)/\rho_S \alpha_S^2 \\ 0 \\ 0 \\ 2i\omega m(\omega)(p/r_S)(\beta_S/\alpha_S)^2 \end{pmatrix} \quad (6.37)$$

On obtient alors pour la partie P de la source

$$\begin{pmatrix} -\dot{A}(r_S) \\ \dot{A}(r_S) \end{pmatrix} = \mathbf{D}^{-1}(r_S) \Delta\mathbf{b}(r_S) = \frac{1}{\omega r_S^2} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \begin{pmatrix} -i\omega m(\omega)/\alpha_S \\ i\omega m(\omega)/\alpha_S \end{pmatrix} \quad (6.38)$$

Si on recombine les harmoniques sphériques, la composante radiale du champ de déplacement d'une onde P s'écrit

$$u_r(r, \Delta, \omega) = \frac{-i\omega m(\omega)i\omega}{2\rho_S \alpha_S^4} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} \dot{\pi}(r_S) R^P [\alpha(r)\dot{\xi}(r)\dot{\pi}(r)] Q^{(2)}(\Delta) \quad (6.39)$$

Enfin, en posant  $2\omega p = 2l + 1$  et en utilisant la transformation de Watson

$$u_r(r, \Delta, \omega) = \frac{-i\omega m(\omega)i\omega}{4\pi \rho_S \alpha_S^4} \int_{\Gamma} \omega^2 p \dot{\pi}(r_S) R^P [\alpha(r)\dot{\xi}(r)\dot{\pi}(r)] Q^{(2)}(\Delta) dp \quad (6.40)$$

$R^P$  dépend du type d'onde que l'on considère. Si on s'intéresse aux ondes réfléchies à la CMB, alors  $R^P = \dot{P}\dot{P}$ . Si on veut calculer l'amplitude des ondes PKP(AB), on doit calculer le coefficient  $T^{PK}T^{KP} = \dot{P}\dot{K}\dot{K}\dot{P}$ . Dans le cadre de l'approximation de Langer, ces coefficients dépendent de la fréquence contrairement aux coefficients calculés dans le cadre de la théorie WKBJ (figure 6.1). En effet, l'expression de ces coefficients dépend des lenteurs généralisées et des fonctions d'onde qui sont fonction de la fréquence. Ainsi,

le coefficient de transmission  $T^{PK}T^{KP}$  est nul pour le paramètre de rai 254 s/rad (correspondant à une incidence rasante à la CMB). Cependant, pour les basses fréquences, on constate une transition plus douce : une petite partie de l'énergie peut être transmise au-delà de la valeur critique pour la  $P_{diff}$ .

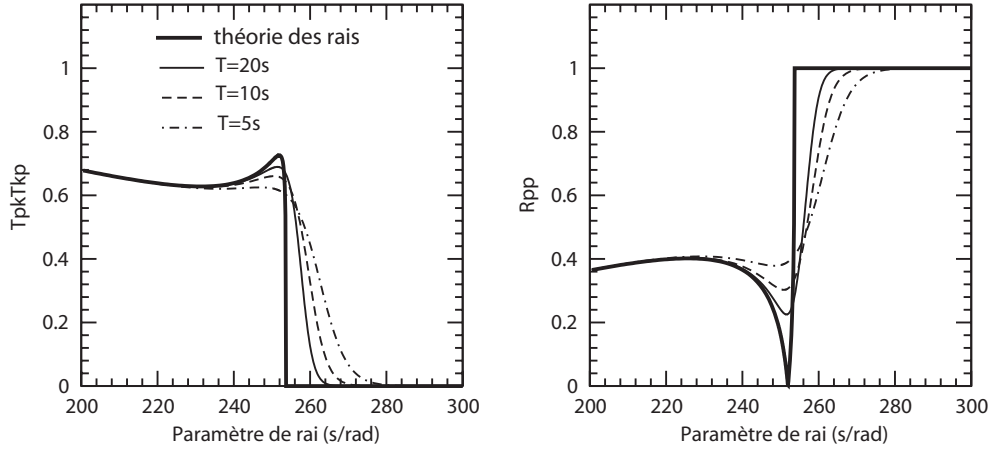


FIG. 6.1 – Variations des coefficients de réflexion/transmission en fonction de la fréquence : coefficient  $\dot{P}\dot{K}.\dot{K}\dot{P}$  calculé à la CMB pour la PKP(AB) (gauche) et coefficient de réflexion  $\dot{P}\dot{P}$  à la CMB pour la PcP (droite). Dans le cadre de la théorie des rais, les coefficients de réflexion/transmission sont indépendants de la fréquence

On peut vérifier les dimensions de l'expression du déplacement (6.40). Les fonctions d'onde  $\hat{\pi}$  sont sans dimension de même que la fonction de Legendre  $Q^{(2)}$  et le coefficient de réflexion/transmission  $R^P$ . Les lenteurs horizontales  $p$  correspondent à l'inverse d'un temps, et donc le terme  $\omega^2 p dp$  est sans dimension. Les lenteurs verticales  $\hat{\xi}$  sont l'inverse d'une vitesse, aussi, le terme  $\alpha(r)\hat{\xi}(r)$  est sans dimension. Le moment de la source  $m(\omega)$ , dans le domaine fréquentiel, a une dimension du type  $[M][L]^2[T]^{-1}$ . L'équation aux dimensions correspondante est donc la suivante :

$$[u_r(r, \Delta, \omega)] = \frac{1}{[T]^2} \frac{[M][L]^2}{[T]} \frac{[L]^3 [T]^4}{[M] [L]^4} = [L][T] \quad (6.41)$$

On retrouve bien la bonne dimension pour le déplacement dans le domaine fréquentiel. Cependant, il faut faire attention aux unités. En effet, on donne souvent le moment à la source  $m(t)$  en  $10^{20}.dynes.cm$  soit  $m(\omega)$  en  $10^{20}.dynes.cm.s$ . Pour obtenir un déplacement en  $cm$ , il faut alors exprimer les vitesses en  $km.s^{-1}$  et la densité  $\rho$  en  $g.cm^{-3}$ .

### Conclusion

Pour calculer le déplacement pour une phase donnée, il faudra donc choisir le contour  $\Gamma$  adéquat (voir Annexe D), définir les discontinuités où sont calculés les coefficients de

réflexion/transmission, et choisir la base de fonctions d'onde.

### 6.3.2 Applications aux ondes $P_{diff}$

#### Choix du contour

De façon similaire aux ondes  $S_{diff}$ , le contour d'intégration pour les ondes  $P_{diff}$  entoure les pôles de diffraction des ondes P dans le manteau (Annexe D). Il est composé de trois segments principaux : le segment AB (à  $-45^\circ$  de l'axe réel), le segment BC (sur l'axe réel et comprenant le paramètre critique pour les ondes P dans le manteau) et le segment CD (à  $+45^\circ$  de l'axe réel). La longueur des segments et le nombre de points sur chaque segment varie avec la fréquence. Généralement, il faut diminuer la longueur des segments dans le plan complexe lorsque la fréquence augmente. L'utilisation de segments dans le plan complexe permet d'éviter l'apparition des phases "d'arrêt" que l'on peut observer avec la méthode de réflectivité, à condition qu'ils ne soient pas trop courts à basse fréquence. La table 6.1 indique les caractéristiques du contour, en fonction de la fréquence, utilisé pour des ondes  $P_{diff}$ .

Gamme de fréquences (Hz) [0.015625 – 0.125]	Borne inférieure (s/rad)	Borne supérieure (s/rad)	Nombre de points
Segment AB	(114.6 , 114.6)	(229.2 , 0.0)	65
Segment BC	(229.2 , 0.0)	(286.5 , 0.0)	65
Segment CD	(286.5 , 0.0)	(343.8 , 57.3)	65
[0.14625 – 0.25]			
Segment AB	(143.2 , 86.0)	(229.2 , 0.0)	65
Segment BC	(229.2 , 0.0)	(286.5 , 0.0)	195
Segment CD	(286.5 , 0.0)	(315.1 , 28.7)	65
[0.265625 – 0.5]			
Segment AB	(200.5 , 28.7)	(229.2 , 0.0)	65
Segment BC	(229.2 , 0.0)	(286.5 , 0.0)	195
Segment CD	(286.5 , 0.0)	(303.7 , 17.2)	65

TAB. 6.1 – Bornes complexes des segments du contour d'intégration pour une onde  $P_{diff}$  pour trois gammes de fréquences.

On associe ce contour à des options (figure 6.2) décrivant la théorie (WKB ou Langer) utilisée pour calculer les fonctions d'ondes et les lenteurs généralisées intervenant dans le

calcul des coefficients de réflexion/transmission.

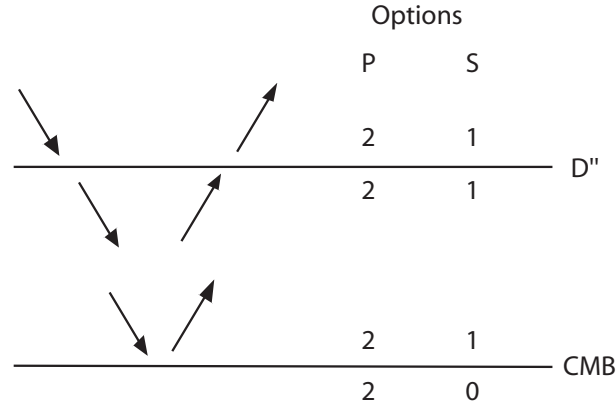


FIG. 6.2 – Options utilisées pour les ondes P et S afin de calculer les fonctions d'onde verticales intervenant dans les calculs des coefficients de réflexion/transmission au sommet de la couche D'' (transmission) et de la CMB (réflexion). L'option 1 correspond à la théorie des rais et l'option 2 est utilisée pour calculer  $\xi$  et  $\xi$  dans le cadre de l'approximation de Langer.

## Analyse des spectres

Dans la zone d'ombre, pour une distance épacentrale donnée  $\Delta$ , l'amplitude des ondes diffractées  $P_{diff}$  est proportionnelle à (Aki et Richards, 1980) :

$$\exp[-a\omega^{1/3}(\Delta - \Delta_d)] \quad (6.42)$$

avec  $\Delta_d$  la distance épacentrale pour un rai ayant une onde rasante à la CMB. La constante  $a$  est fonction du profil de vitesse et de l'atténuation à la base du manteau.  $\gamma(\omega) = a\omega^{1/3}$  est le paramètre d'atténuation qui dépend essentiellement du gradient de vitesse dans la couche D'' (Alexander et Phinney, 1966; Phinney et Alexander, 1969; Doornbos et Mondt, 1979a,b; Souriau et Poupinet, 1994). Ainsi, le spectre des ondes  $P_{diff}$  est atténué pour les hautes fréquences et leur amplitude diminue avec la distance épacentrale (figure 6.3). L'amplitude et les variations du spectre avec la fréquence sont également fonction du contenu fréquentiel de la source et de l'atténuation.

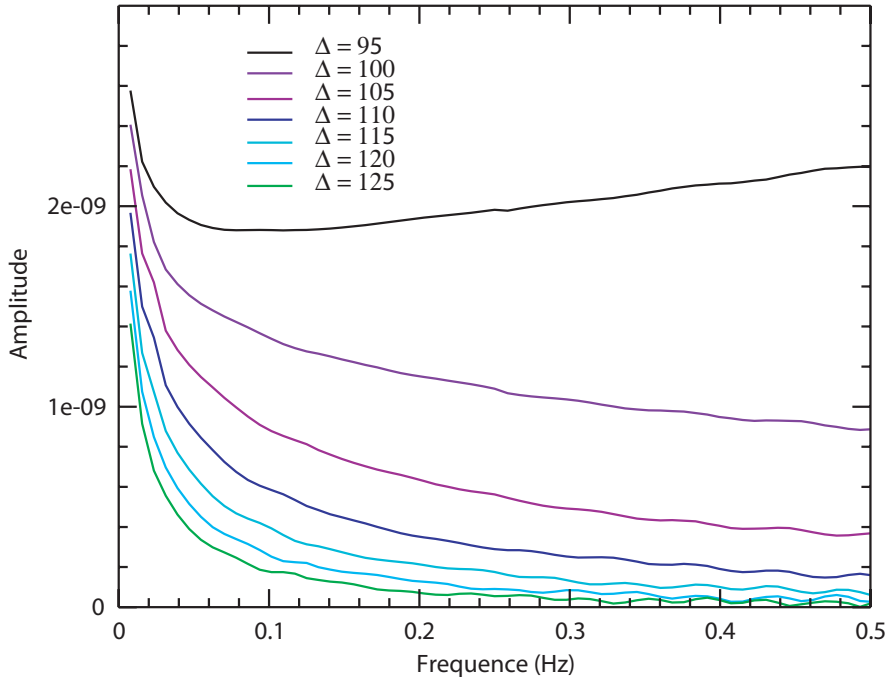


FIG. 6.3 – Amplitude du spectre de  $P_{diff}$  en fonction de la fréquence pour différentes distances épicentrales, calculée dans le modèle ak135 et fonction du profil de vitesse, de la présence d’atténuation et de la source.

Dans le cadre de la théorie des rais, on ne devrait pas observer de l’énergie au delà de la distance épicentrale critique  $\Delta_d$ . En modélisant l’amplitude des ondes diffractées dans la zone d’ombre à l’aide de l’approximation de Langer, on observe que les hautes fréquences sont plus vite atténuées que les basses fréquences. Ainsi, les basses fréquences peuvent être observées très loin dans la zone d’ombre (figure 6.4).

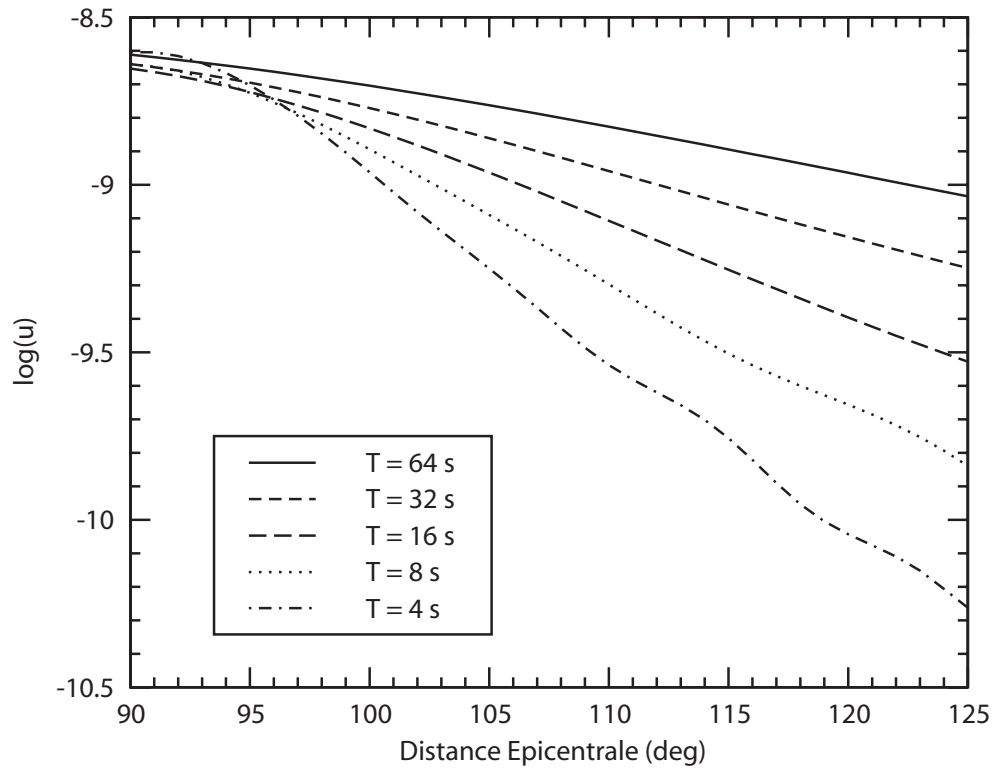


FIG. 6.4 – Composante verticale du champ de déplacement d’une onde P dans la zone d’ombre ( $\Delta_d \sim 95^\circ$ ) pour une source explosive située à 500 km de profondeur, pour différentes fréquences.

La décroissance de l’amplitude avec la distance épacentrale est fonction du profil de vitesse. La position relative des courbes sera fonction de la source et de l’atténuation.

## Sismogrammes

La figure 6.5 montre les sismogrammes synthétiques des ondes  $P_{diff}$  pour une source explosive située à 500 km de profondeur en utilisant le modèle de référence ak135. On observe bien la diminution de l’amplitude des ondes qui se propagent de plus en plus loin dans la zone d’ombre. La forme d’onde sera fonction du modèle de référence, de l’atténuation et de la source.

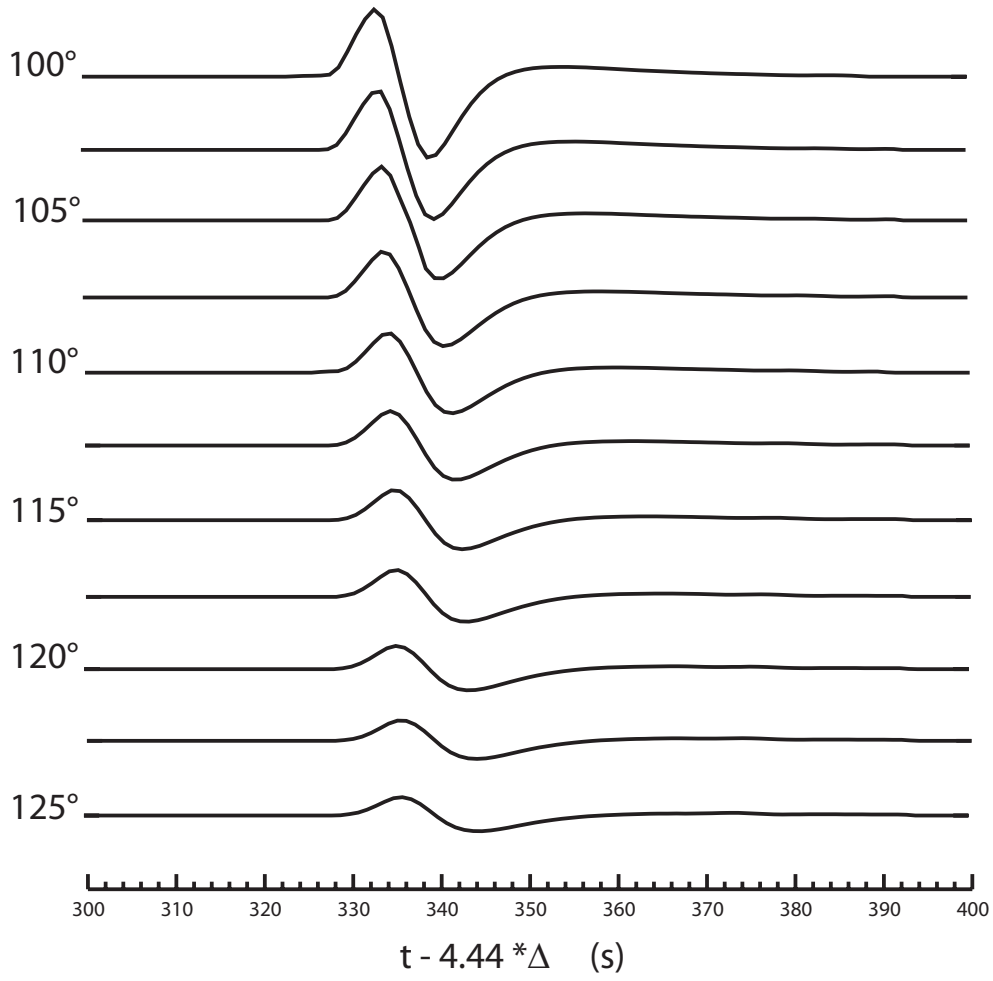


FIG. 6.5 – Ondes  $P_{diff}$ . Sismogrammes synthétiques (composante verticale) calculés dans la modèle ak135 pour une source explosive à 500 km de profondeur. L'axe des abscisses donne le temps réduit  $t - p_{crit}\Delta$ . Les distances épacentrales varient de  $100^\circ$  à  $125^\circ$  avec un pas de  $2.5^\circ$ .

## 6.4 Champ diffusé par des hétérogénéités isotropes

Notre objectif est de calculer des noyaux de sensibilité en temps de propagation pour les ondes P diffractées à la CMB. En utilisant l'approximation de Langer, on peut calculer le champ de déplacement d'une onde P diffractée. Il nous faut maintenant déterminer l'expression du champ de déplacement pour une onde diffractée diffusée par une hétérogénéité. Ainsi, la diffraction d'une onde le long d'une discontinuité sera décrite par l'approximation de Langer et la diffusion simple sera modélisée en utilisant l'approximation de Born.

Dans les chapitres précédents nous avons vu que le champ incident et le champ diffusé obéissent aux équations suivantes dans le domaine fréquentiel :

$$\rho\omega^2 u_i^0 + \partial_j c_{ijkl}^0 \partial_k u_k^0 = -f_i \quad (6.43)$$

$$\rho\omega^2 \delta u_i + \partial_j c_{ijkl} \partial_k \delta u_l = -\delta f_i \quad (6.44)$$

$$\delta f_i = \partial_j (\delta c_{ijkl} \partial_k u_l^0) \quad (6.45)$$

L'expression du champ diffusé par une hétérogénéité isotrope s'écrit :

$$\begin{aligned} \delta u_i(\mathbf{r}) &= - \int d^3 \mathbf{x} G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{x}) \delta L_{jk}(\mathbf{x}) G_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{r}_S) f_l(\mathbf{r}_S) \\ \delta u_i(\mathbf{r}) &= \int d^3 \mathbf{x} [\delta \rho \omega^2 G_{il}(\mathbf{r}, \mathbf{x}) G_{jl}(\mathbf{x}, \mathbf{r}_S) \\ &\quad - \delta \lambda (\partial_j G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{x})) (\partial_k G_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{r}_S)) \\ &\quad - \delta \mu (\partial_k G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{x})) (\partial_j G_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{r}_S)) \\ &\quad - \delta \mu (\partial_k G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{x})) (\partial_k G_{jl}(\mathbf{x}, \mathbf{r}_S))] f_l(\mathbf{r}_S) \end{aligned} \quad (6.46)$$

La différenciation  $\partial$  intervient sur les coordonnées spatiales de l'hétérogénéité en  $\mathbf{x}$ .

On utilise l'approximation de Langer dans la couche D'' et l'approximation WKBJ au-dessus. Ainsi, si le point diffractant est dans la couche D'', le couplage est exprimé dans le cadre de la théorie de Langer. Si le point diffractant n'est pas dans la couche D'', on exprimera le couplage dans le cadre de la théorie WKBJ. L'expression du champ diffusé dépend également de la configuration géométrique source-hétérogénéité-récepteur. Lorsque le point diffractant est dans la couche D'', on reprendra le développement de Emery et al. (1999). Nous verrons ensuite le cas où le point diffractant n'est pas dans la D''.

### 6.4.1 Hétérogénéités dans la couche D''

Dans cette section et les suivantes, en fonction du modèle choisi, le sommet de la couche D'' (approximativement à  $\sim 250$  km de la CMB) peut correspondre à une discontinuité de vitesse du premier ou second ordre. Dans le cas d'une discontinuité du premier ordre, il faudra alors tenir compte des coefficient de réflexion/transmission via les propagateurs.

#### Vecteur $\mathbf{b}$ pour l'onde incidente au niveau de l'hétérogénéité

Dans le formalisme des propagateurs, on peut relier l'amplitude de l'onde incidente dans le manteau en  $r_{D+}$  à l'amplitude de l'onde en  $r_{D-}$ . Les signes  $+/-$  indiquent que les éléments sont calculés au-dessus ou au-dessous de la discontinuité considérée. La figure



6.6 illustre les conditions aux limites au sommet de la couche D'' et à la CMB, dans le cas où l'hétérogénéité est dans la couche D''.

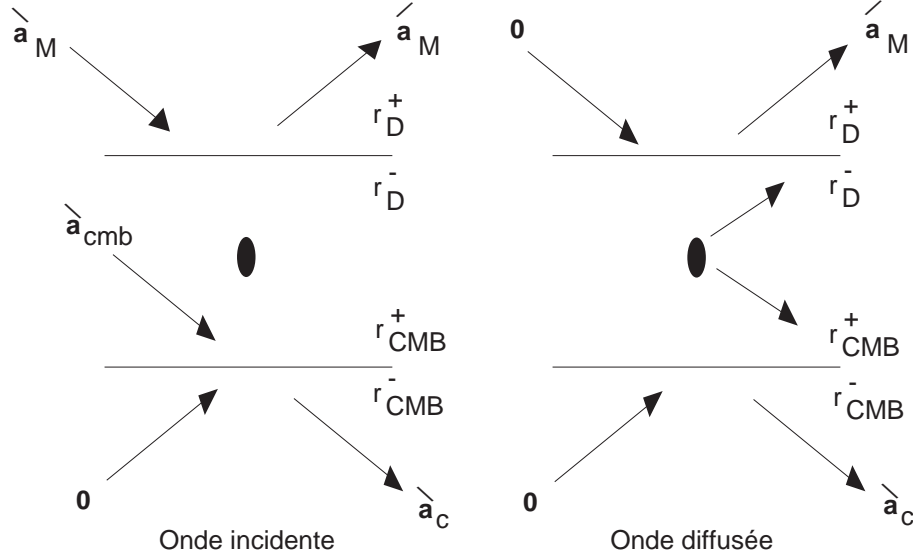


FIG. 6.6 – Détails des conditions aux limites au sommet de la D'' et dans le noyau pour l'onde incidente et l'onde diffusée dans le cas où l'hétérogénéité est dans la couche D'' (d'après Emery et al. (1999)).

Le vecteur déplacement/contrainte en  $r_{D+}$  et  $r_{D-}$  est fonction de l'amplitude des ondes montante et descendante en  $r_{D+}$  et  $r_{D-}$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(r_{D+}) &= \mathbf{D}(r_{D+})\mathbf{\Lambda}(r_{D+}) \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{a}}_{\mathbf{M}}(r_{D+}) \\ \dot{\mathbf{a}}_{\mathbf{M}}(r_{D+}) \end{pmatrix} \\ \mathbf{b}(r_{D-}) &= \mathbf{D}(r_{D-})\mathbf{\Lambda}(r_{D-}) \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{a}}_{\mathbf{M}}(r_{D-}) \\ \dot{\mathbf{a}}_{\mathbf{M}}(r_{D-}) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.47)$$

La continuité du déplacement et de la traction au sommet de la D'' implique que  $\mathbf{b}(r_{D+}) = \mathbf{b}(r_{D-})$  et donc que l'amplitude dans le manteau en  $r_{D+}$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{a}}_{\mathbf{M}}(r_{D+}) \\ \dot{\mathbf{a}}_{\mathbf{M}}(r_{D+}) \end{pmatrix} &= \mathbf{\Lambda}^{-1}(r_{D+})\mathbf{D}^{-1}(r_{D+})\mathbf{D}(r_{D-})\mathbf{\Lambda}(r_{D-}) \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{a}}_{\mathbf{M}}(r_{D-}) \\ \dot{\mathbf{a}}_{\mathbf{M}}(r_{D-}) \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{S}(r_{D+}, r_{D-}) \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{a}}_{\mathbf{M}}(r_{D-}) \\ \dot{\mathbf{a}}_{\mathbf{M}}(r_{D-}) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.48)$$

Dans l'approximation de Langer, l'amplitude de l'onde est constante dans une couche, donc l'amplitude de l'onde dans la couche D'' est égale à l'amplitude de l'onde incidente

à la CMB :

$$\dot{\mathbf{a}}_{\mathbf{M}}(r_{D-}) = \dot{\mathbf{a}}_{\mathbf{CMB}} \quad (6.49)$$

Soit  $\mathbf{R}_{\mathbf{CMB}}$  la matrice contenant les coefficients de réflexion/transmission à la CMB pour les ondes P-SV :

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{a}}_{\mathbf{M}}(r_{D+}) \\ \dot{\mathbf{a}}_{\mathbf{M}}(r_{D-}) \end{pmatrix} = \mathbf{S}(r_{D+}, r_{D-}) \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{R}_{\mathbf{CMB}} \end{pmatrix} \dot{\mathbf{a}}_{\mathbf{CMB}} \quad (6.50)$$

On peut décomposer la matrice  $\mathbf{S}$  en 4 sous-matrices correspondant aux combinaisons montantes et descendantes :

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{dd} & \mathbf{S}_{du} \\ \mathbf{S}_{ud} & \mathbf{S}_{uu} \end{bmatrix} \quad (6.51)$$

On peut vérifier que chaque sous-matrice est diagonale. Ainsi, l'amplitude de l'onde descendante à la CMB s'écrit :

$$\dot{\mathbf{a}}_{\mathbf{CMB}} = (\mathbf{S}_{dd} + \mathbf{S}_{du}\mathbf{R}_{\mathbf{CMB}})^{-1}\dot{\mathbf{a}}_{\mathbf{M}}(r_{D+}) \quad (6.52)$$

Si on définit  $\mathbf{R}_{\mathbf{D}''}$ , la matrice contenant les coefficients de réflexion-transmission au sommet de la couche D''

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{a}}_{\mathbf{M}}(r_{D+}) &= (\mathbf{S}_{ud} + \mathbf{S}_{uu}\mathbf{R}_{\mathbf{CMB}})(\mathbf{S}_{dd} + \mathbf{S}_{du}\mathbf{R}_{\mathbf{CMB}})^{-1} \dot{\mathbf{a}}_{\mathbf{M}}(r_{D+}) \\ &= \mathbf{R}_{\mathbf{D}''} \dot{\mathbf{a}}_{\mathbf{M}}(r_{D+}) \end{aligned} \quad (6.53)$$

La matrice  $\mathbf{R}_{\mathbf{D}''}$  tient compte de la réflexion à la CMB et de la propagation dans la couche D''. L'amplitude de l'onde montante sortant de la couche D'' est fonction de l'amplitude de l'onde descendante entrant dans la couche D''.

Le vecteur déplacement/contrainte au niveau de l'hétérogénéité s'écrit donc

$$\mathbf{b}(r_X) = \mathbf{D}(r_X)\mathbf{\Lambda}(r_X) \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{a}}_{\mathbf{M}}(r_{D-}) \\ \dot{\mathbf{a}}_{\mathbf{M}}(r_{D-}) \end{pmatrix} \quad (6.54)$$

soit en fonction de l'amplitude des ondes montantes et descendantes au-dessus de la couche D''

$$\mathbf{b}(r_X) = \mathbf{D}(r_X)\mathbf{\Lambda}(r_X)\mathbf{S}^{-1}(r_{D+}, r_{D-}) \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{a}}_{\mathbf{M}}(r_{D+}) \\ \dot{\mathbf{a}}_{\mathbf{M}}(r_{D+}) \end{pmatrix} \quad (6.55)$$

L'onde incidente est générée par une source qui est équivalente à une discontinuité du vecteur déplacement-contrainte au point  $\mathbf{r}_S$  :

$$\Delta \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\mathbf{F} \end{pmatrix} \quad (6.56)$$

avec

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\omega r_S^2} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \mathbf{f}_l \quad (6.57)$$

On considère que la source est située dans une région homogène au rayon  $r_S$ . On peut relier le vecteur déplacement/contrainte en  $r_S$  et  $r_S-$  à l'amplitude de l'onde à la source (Kennett, 2001, chap. 14) :

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(r_S+) &= \mathbf{D}(r_S-)\mathbf{\Lambda}(r_S+) \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\mathbf{a}}_S \end{pmatrix} \\ \mathbf{b}(r_S-) &= \mathbf{D}(r_S-)\mathbf{\Lambda}(r_S+) \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{a}}_S \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.58)$$

Soit le saut de vecteur déplacement-contrainte à la source :

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{b} &= \mathbf{b}(r_S+) - \mathbf{b}(r_S-) = \mathbf{D}(r_S)\mathbf{\Lambda}(r_S) \begin{pmatrix} -\dot{\mathbf{a}}_S \\ \dot{\mathbf{a}}_S \end{pmatrix} \\ \Delta \mathbf{a} &= \mathbf{\Lambda}^{-1}(r_S)\mathbf{D}^{-1}(r_S)\Delta \mathbf{b} \end{aligned} \quad (6.59)$$

Une discontinuité de traction se traduit par une discontinuité d'amplitude. Si on suppose une propagation simple vers le bas depuis la source jusqu'au sommet de la couche D", l'amplitude de l'onde descendante à la source correspond à l'amplitude de l'onde descendante dans le manteau :

$$\begin{pmatrix} -\dot{\mathbf{a}}_S \\ \dot{\mathbf{a}}_S \end{pmatrix} = \mathbf{\Lambda}^{-1}(r_S)\mathbf{D}^{-1}(r_S) \begin{pmatrix} 0 \\ -\mathbf{F} \end{pmatrix} \quad (6.60)$$

sachant que

$$\dot{\mathbf{a}}_S = - \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dot{\mathbf{a}}_S \\ \dot{\mathbf{a}}_S \end{pmatrix} \quad (6.61)$$

alors

$$\dot{\mathbf{a}}_M = \dot{\mathbf{a}}_S = \mathbf{T}_d \mathbf{F} \quad (6.62)$$

avec

$$\mathbf{T}_d = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{\Lambda}^{-1}(r_S) \mathbf{D}^{-1}(r_S) \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \quad (6.63)$$

On obtient donc que la partie déplacement du vecteur déplacement contrainte au niveau de l'hétérogénéité s'écrit

$$\mathbf{b}(r_X) = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{D}(r_X) \mathbf{\Lambda}(r_X) \mathbf{S}^{-1}(r_{D+}, r_{D-}) \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{R}_{D''} \end{pmatrix} \mathbf{T}_d \mathbf{F} \quad (6.64)$$

### Vecteur $\mathbf{b}$ pour l'onde diffusée au niveau du récepteur

Pour le champ diffusé, on considère une source secondaire au point  $\mathbf{x}$ . Cette source secondaire produit une discontinuité du vecteur déplacement-contrainte

$$\Delta \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\mathbf{F}_{sc} \end{pmatrix} \quad (6.65)$$

Si la source secondaire est dans la couche D'', il n'y a pas de champ descendant dans le manteau au-dessus de la D'' ( $\dot{\mathbf{a}}_{\mathbf{M}}(r_{D+}) = \mathbf{0}$ ).

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{a}}_{\mathbf{M}}(r_{D+}) \end{pmatrix} &= \mathbf{S}(r_{D+}, r_{D-}) \mathbf{\Lambda}^{-1}(r_X) \mathbf{D}^{-1}(r_X) \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{F}_{sc} \end{pmatrix} \\ &\quad + \mathbf{S}(r_{D+}, r_{D-}) \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{R}_{\mathbf{CMB}} \end{pmatrix} \dot{\mathbf{a}}_{\mathbf{CMB}} \end{aligned} \quad (6.66)$$

En posant

$$\mathbf{U} = \mathbf{S}(r_{D+}, r_{D-}) \mathbf{\Lambda}^{-1}(r_X) \mathbf{D}^{-1}(r_X) \quad (6.67)$$

on en déduit que

$$\dot{\mathbf{a}}_{\mathbf{CMB}} = (\mathbf{S}_{dd} + \mathbf{S}_{du} \mathbf{R}_{\mathbf{CMB}})^{-1} \mathbf{U}_{12} \mathbf{F}_{sc} \quad (6.68)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{a}}_{\mathbf{M}}(r_{D+}) &= \mathbf{U}_{22} + (\mathbf{S}_{ud} + \mathbf{S}_{uu} \mathbf{R}_{\mathbf{CMB}})(\mathbf{S}_{dd} + \mathbf{S}_{du} \mathbf{R}_{\mathbf{CMB}})^{-1} \mathbf{U}_{12} \mathbf{F}_{sc} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{D''} & -\mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \mathbf{S}(r_{D+}, r_{D-}) \mathbf{\Lambda}^{-1}(r_X) \mathbf{D}^{-1}(r_X) \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.69)$$

Si on suppose une propagation simple vers le haut depuis  $r_{D+}$  jusqu'au récepteur  $\mathbf{r}$ , la partie déplacement de  $\mathbf{b}$  correspond à

$$\mathbf{b}(r) = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{D}(r) \mathbf{\Lambda}(r) \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \dot{\mathbf{a}}_{\mathbf{M}}(r_{D+}) = \mathbf{T}_u \dot{\mathbf{a}}_{\mathbf{M}}(r_{D+}) \quad (6.70)$$

On obtient donc que la partie déplacement du vecteur déplacement/contrainte au niveau du récepteur s'écrit

$$\mathbf{b}(r) = \mathbf{T}_u \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{D''} & -\mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \mathbf{S}(r_{D+}, r_{D-}) \mathbf{\Lambda}^{-1}(r_X) \mathbf{D}^{-1}(r_X) \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \mathbf{F}_{sc} \quad (6.71)$$

### Tenseurs de Green

On sait que le champ de déplacement résulte de la convolution du tenseur de Green avec une force traduisant l'effet de la source  $\mathbf{u}_i = \mathbf{G}_{ij} \mathbf{f}_j$ . D'autre part, si on recombine les harmoniques sphériques

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \frac{\tau}{\omega} \end{pmatrix} = \sum_l \mathbf{b} Y_l(\theta) \quad (6.72)$$

On obtient donc le tenseur de Green de l'onde incidente

$$\mathbf{G}(r_X, \Delta_{SX}) = \frac{1}{\omega r_S^2} \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{U}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{R}_{D''} \end{pmatrix} \mathbf{T}_d Q^{(2)}(k_{in}, \cos \Delta_{SX}) \quad (6.73)$$

Enfin, en posant  $k = l + 1/2$  et en utilisant la transformation de Watson

$$\mathbf{G}(r_X, \Delta_{SX}) = \frac{1}{2\pi\omega r_S^2} \int_{\Gamma} k_{in} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{U}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{R}_{D''} \end{pmatrix} \mathbf{T}_d Q^{(2)}(k_{in}, \cos \Delta_{SX}) dk_{in} \quad (6.74)$$

avec  $k_{in}$  le vecteur d'onde incident et  $\Delta_{SX}$  la distance angulaire entre la source et l'hétérogénéité.

De la même façon, on obtient la fonction de Green pour l'onde diffusée

$$\mathbf{G}(r_X, \Delta_{RX}) = \frac{1}{2\pi\omega r_X^2} \int_{\Gamma} k_{sc} \mathbf{T}_u \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{D''} & -\mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \mathbf{U} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} Q^{(2)}(k_{sc}, \cos \Delta_{RX}) dk_{sc} \quad (6.75)$$

avec  $k_{sc}$  le vecteur d'onde de l'onde diffusée, et  $\Delta_{RX}$ , la distance angulaire entre l'hétérogénéité et le récepteur.

#### 6.4.2 Hétérogénéité hors de la D''

Lorsque le point diffractant n'est plus dans la couche D'', les conditions aux limites pour l'onde incidente et l'onde diffusée sont différentes du cas précédent. Il faudra considérer le cas où l'onde incidente et l'onde diffusée ont leur point bas dans la couche D'' ou non (figure 6.7).

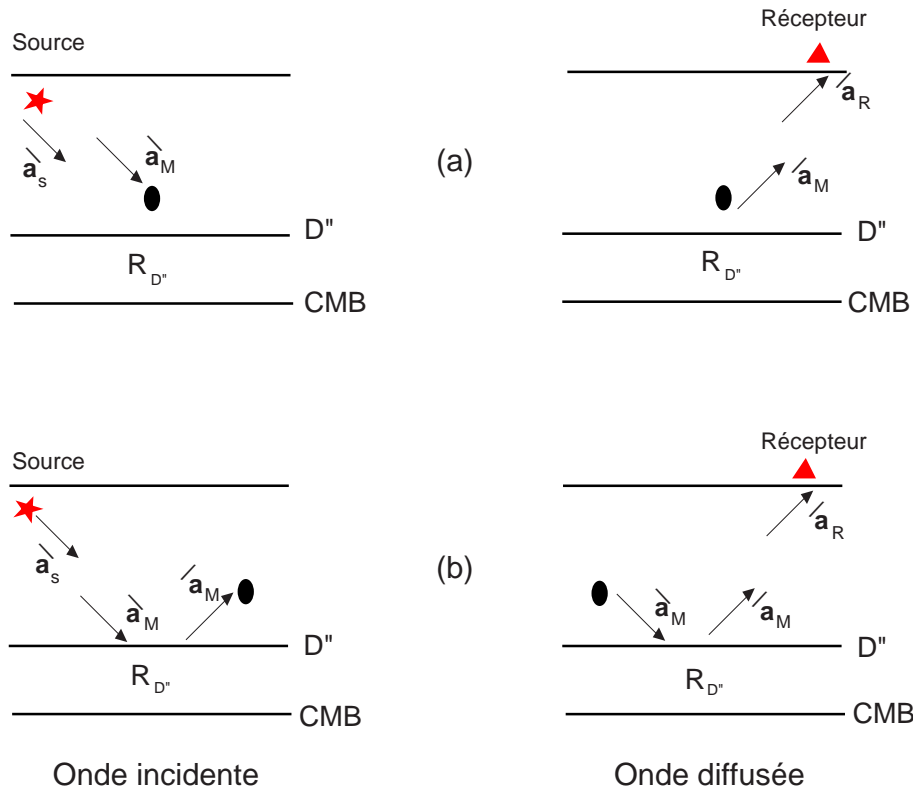


FIG. 6.7 – Détails des conditions aux limites pour l'onde incidente et l'onde diffusée : (a) l'onde ne traverse pas la couche  $D''$ , (b) l'onde traverse la couche  $D''$ .

### Vecteur $\mathbf{b}(r_X)$ pour l'onde incidente

Considérons tout d'abord l'onde incidente. Pour un paramètre de rai donné, si l'onde incidente ne traverse pas la couche  $D''$ , alors on considère que la propagation est simple depuis la source jusqu'au point diffractant et qu'elle est décrite par l'approximation WKBJ :

$$\hat{\mathbf{a}}(r_X) = \hat{\mathbf{a}}(r_S) = \mathbf{T}_d \mathbf{F} \quad (6.76)$$

Alors la composante déplacement du vecteur  $\mathbf{b}(r_X)$  s'écrit :

$$\mathbf{b}(r_X) = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{D}(r_X) \mathbf{\Lambda}(r_X) \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \mathbf{T}_d \mathbf{F} \quad (6.77)$$

Si l'onde traverse la couche  $D''$ , il faut alors prendre en compte l'approximation de Langer pour décrire la propagation dans la  $D''$ . Dans ce cas, seule l'onde montante arrive au point diffractant :

$$\mathbf{b}(r_X) = \mathbf{D}(r_X) \mathbf{\Lambda}(r_X) \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \hat{\mathbf{a}}_M$$

$$= \mathbf{D}(r_X) \mathbf{\Lambda}(r_X) \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{\mathbf{D}''} \end{pmatrix} \mathbf{\dot{a}}_M \quad (6.78)$$

Ainsi la composante déplacement du vecteur  $\mathbf{b}$  s'écrit :

$$\mathbf{b}(r_X) = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{D}(r_X) \mathbf{\Lambda}(r_X) \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{\mathbf{D}''} \end{pmatrix} \mathbf{T}_d \mathbf{F} \quad (6.79)$$

### Vecteur $\mathbf{b}(r)$ pour l'onde diffusée

On raisonne de la même façon que pour l'onde incidente. Il y a seulement une onde montante au récepteur. Si pour un paramètre de rai donné l'onde diffusée ne traverse pas la couche  $\mathbf{D}''$ , alors on considère une propagation simple depuis le point diffractant jusqu'au récepteur :

$$\mathbf{b}(r) = \mathbf{T}_u \mathbf{\dot{a}}(r_X) \quad (6.80)$$

Au point diffractant, l'amplitude de l'onde descendante vérifie

$$\mathbf{\dot{a}}(r_X) = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{\Lambda}^{-1}(r_X) \mathbf{D}^{-1}(r_X) \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \mathbf{F}_{sc} \quad (6.81)$$

Si l'onde ne traverse pas d'interface entre le point diffractant et le récepteur alors l'amplitude de l'onde montante est égale à l'amplitude de l'onde descendante. Ainsi la composante déplacement de  $\mathbf{b}(r)$  est :

$$\mathbf{b}(r) = \mathbf{T}_u \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{\Lambda}^{-1}(r_X) \mathbf{D}^{-1}(r_X) \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \mathbf{F}_{sc} \quad (6.82)$$

Si l'onde traverse la couche  $\mathbf{D}''$ , il faut alors rendre en compte l'approximation de Langer pour décrire la propagation dans la  $\mathbf{D}''$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(r) &= \mathbf{T}_u \mathbf{\dot{a}}_M \\ &\quad \mathbf{T}_u \mathbf{R}_{\mathbf{D}''} \mathbf{\dot{a}}_M \end{aligned} \quad (6.83)$$

donc

$$\mathbf{b}(r) = \mathbf{T}_u \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{\mathbf{D}''} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{\Lambda}^{-1}(r_X) \mathbf{D}^{-1}(r_X) \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \mathbf{F}_{sc} \quad (6.84)$$

L'expression des tenseurs de Green est obtenue de façon similaire au cas où les points diffractants sont dans la couche  $\mathbf{D}''$ .

### 6.4.3 Expression du champ diffusé

Le champ diffusé au point diffractant  $X$  s'écrit

$$\delta \mathbf{u}(\omega, \mathbf{r}) = \int_V dV \frac{1}{4\pi^2 \omega^2 r_s^2 r_X^2} \times \int \int k_{sc} k_{in} \mathbf{T}_u(k_{sc}) \mathbf{R}_1(k_{sc}) \mathbf{C}(k_{sc}, k_{in}, r_X) \mathbf{R}_2(k_{in}) \mathbf{T}_d(k_{in}) \mathbf{f}(r_s) dk_{sc} dk_{in} \quad (6.85)$$

Les termes  $\mathbf{T}_u$  et  $\mathbf{T}_d$  traduisent la propagation dans le manteau dans le cadre de l'approximation WKBJ. Les matrices  $\mathbf{R}_1(k_{sc})$  et  $\mathbf{R}_2(k_{in})$  dépendent de la position du point diffractant. La figure 6.8 illustre les configurations possibles pour l'onde incidente.

Position du point diffractant	$\mathbf{R}_1(k_{sc})$	$\mathbf{R}_2(k_{in})$
<b>Dans la couche D''</b>	$\begin{pmatrix} \mathbf{R}_{D''}(k_{sc}) & -\mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \mathbf{S}(k_{sc})$	$\mathbf{S}^{-1}(k_{in}) \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{R}_{D''}(k_{in}) \end{pmatrix}$
<b>Dans le manteau</b>		
si l'onde traverse la D''	$\begin{pmatrix} \mathbf{R}_{D''}(k_{sc}) & \mathbf{0} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{D''}(k_{in}) \end{pmatrix}$
si l'onde ne traverse pas la D''	$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_2 \end{pmatrix}$

L'intégrale sur le volume porte sur la position du point diffractant  $X$  et la matrice de couplage des ondes P et SV au niveau de l'hétérogénéité s'écrit :

$$\mathbf{C}(k_{sc}, k_{in}, r_X) = Q^{(2)}(k_{sc}, \cos \Delta_{RX}) \mathbf{\Lambda}^{-1}(k_{sc}, \mathbf{x}) \mathbf{D}^{-1}(k_{sc}, \mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}) \mathbf{D}(k_{in}, \mathbf{x}) \mathbf{\Lambda}(k_{in}, \mathbf{x}) Q^{(2)}(k_{in}, \cos \Delta_{XS}) \quad (6.86)$$

avec

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\delta \mathbf{L}(\mathbf{x}) & 0 \end{pmatrix} \quad (6.87)$$

La matrice  $\mathbf{E}(\mathbf{x})$  décrit le couplage entre le tenseur de Green incident et diffusé, et indique que la source secondaire située au point diffractant  $\mathbf{x}$  est représentée par une discontinuité de traction. Elle dépend du rayon  $r_X$  auquel se trouve l'hétérogénéité et des vecteurs d'onde incident et diffusé. Les éléments de cette matrice expriment le couplage des diff-



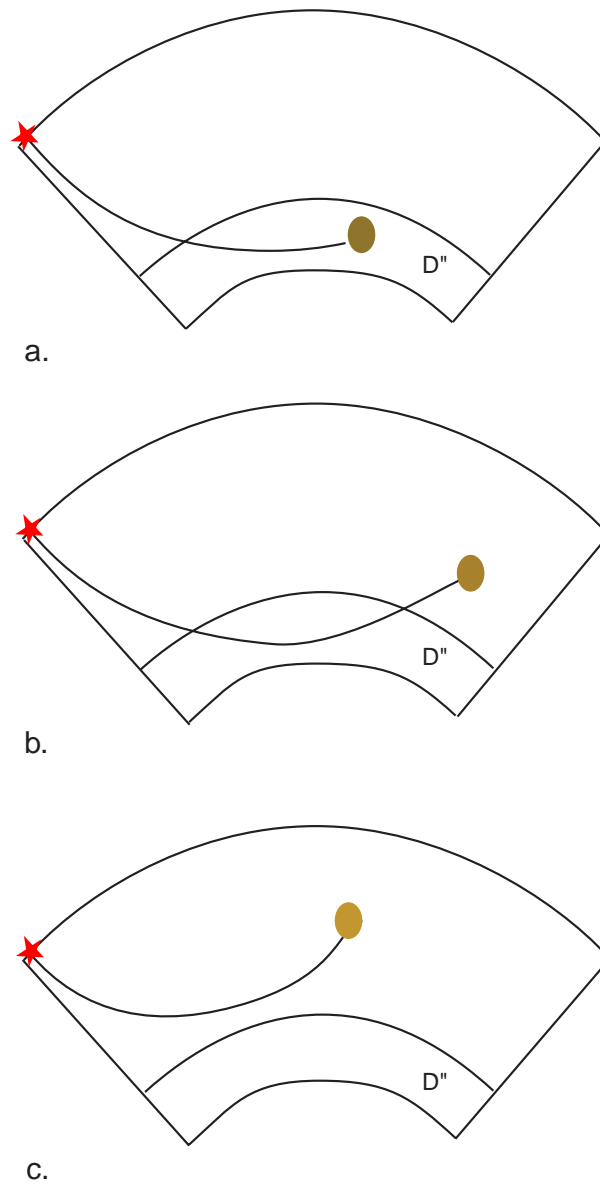


FIG. 6.8 – Les trois configurations pour l'onde incidente : (a) le point diffractant est dans la couche  $D''$ , (b) le point diffractant n'est pas dans la couche  $D''$  mais le rai incident a son point-bas dans la couche  $D''$ , (c) le point diffractant est dans le manteau ainsi que le point bas du rai.

rentes ondes entre elles :

$$C(k_{sc}, k_{in}, r_X) = \begin{bmatrix} C(P_{sc}^\downarrow P_{in}^\downarrow) & C(P_{sc}^\downarrow SV_{in}^\downarrow) & C(P_{sc}^\downarrow P_{in}^\uparrow) & C(P_{sc}^\downarrow SV_{in}^\uparrow) \\ C(SV_{sc}^\downarrow P_{in}^\downarrow) & C(SV_{sc}^\downarrow SV_{in}^\downarrow) & C(SV_{sc}^\downarrow P_{in}^\uparrow) & C(SV_{sc}^\downarrow SV_{in}^\uparrow) \\ C(P_{sc}^\uparrow P_{in}^\downarrow) & C(P_{sc}^\uparrow SV_{in}^\downarrow) & C(P_{sc}^\uparrow P_{in}^\uparrow) & C(P_{sc}^\uparrow SV_{in}^\uparrow) \\ C(SV_{sc}^\uparrow P_{in}^\downarrow) & C(SV_{sc}^\uparrow SV_{in}^\downarrow) & C(SV_{sc}^\uparrow P_{in}^\uparrow) & C(SV_{sc}^\uparrow SV_{in}^\uparrow) \end{bmatrix} \quad (6.88)$$

La flèche  $\downarrow$  caractérise une onde qui se propage vers le bas et  $\uparrow$  une onde qui se propage vers le haut. Les éléments de couplage dépendent de la position du point diffractant. En effet, si ce point diffractant est dans la couche D'', on utilisera l'approximation de Langer pour exprimer les éléments des matrices **D** et **A**. Si le point diffractant est dans le manteau, on utilisera l'approximation WKBJ.

Si on considère le cas où le point diffractant est dans la couche D'', alors l'expression du champ diffusé est la suivante :

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}(\omega, \mathbf{r}) = & \int_V dV \frac{1}{4\pi^2 \omega^2 r_s^2 r_X^2} \int \int k_{sc} k_{in} \mathbf{T}_u(k_{sc}) \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{D''}(k_{sc}) & -\mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \\ & \times \mathbf{S}(k_{sc}) \mathbf{C}(k_{sc}, k_{in}, r_X) \mathbf{S}^{-1}(k_{in}) \\ & \times \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{R}_{D''}(k_{in}) \end{pmatrix} \mathbf{T}_d(k_{in}) \mathbf{f}(r_s) dk_{sc} dk_{in} \end{aligned} \quad (6.89)$$

L'expression du champ diffusé traduit qu'une source ponctuelle en  $\mathbf{r}_s$ , équivalente à une discontinuité de traction, émet une onde de vecteur d'onde  $\mathbf{k}_{in}$ . Cette onde se propage jusqu'au point diffractant en  $\mathbf{x}$ . La propagation horizontale et l'expansion géométrique sont prises en compte dans la fonction de Legendre  $Q^{(2)}$ . L'onde est diffusée (matrice **E**) et la diffusion produit un couplage entre les différentes ondes. L'onde diffusée de vecteur d'onde  $\mathbf{k}_{sc}$  se propage ensuite jusqu'au receptr  $\mathbf{r}$ .

#### 6.4.4 Couplage des ondes P-SV

Les expressions des éléments de la matrice de couplage développées dans ce paragraphe sont indépendantes de la théorie utilisée (WKBJ ou Langer). On adapte ensuite l'expression des fonctions d'onde et des lenteurs généralisées en fonction de la théorie utilisée. Par ailleurs, nous avons montré en annexe E, que les expressions de ces matrices sont compatibles avec les coefficients de scattering isotropes données au chapitre 2.

## Construction

Prenons l'exemple d'un couplage P-P :

$$C_{P_{sc}P_{in}} = \left( -i \frac{\omega^2 r_X^2}{2\rho_X \alpha_X^3} \right) Q^{(2)}(k_{sc}, \cos(\theta_R - \theta_X)) \pi_{sc} \mathbf{D}^{-1}(P_{sc})(-\delta L) \mathbf{D}(P_{in}) \pi_{in} Q^{(2)}(k_{in}, \cos(\theta_X - \theta_S)) \quad (6.90)$$

$C(k_{sc}, k_{in}, r_X)$  dépend de la direction de propagation de l'onde incidente et de l'onde diffusée mais n'utilise que la partie déplacement des matrices  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{D}^{-1}$ . Si on choisit de travailler dans un repère indépendant des grands cercles source-hétérogénéité (caractérisé par le trièdre  $(\mathbf{r}, \boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\phi}_1)$ ) et hétérogénéité-recepteur (caractérisé par le trièdre  $(\mathbf{r}, \boldsymbol{\theta}_2, \boldsymbol{\phi}_2)$ ), on peut introduire le trièdre  $(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{y})$  (Emery et al., 1999), où  $\mathbf{r}$  coïncide avec la direction radiale,  $\mathbf{x}$  avec le Nord et  $\mathbf{y}$  avec l'Est (figure 6.9). Les angles azimutaux sont comptés positivement dans le sens des aiguilles d'une montre depuis le Nord.

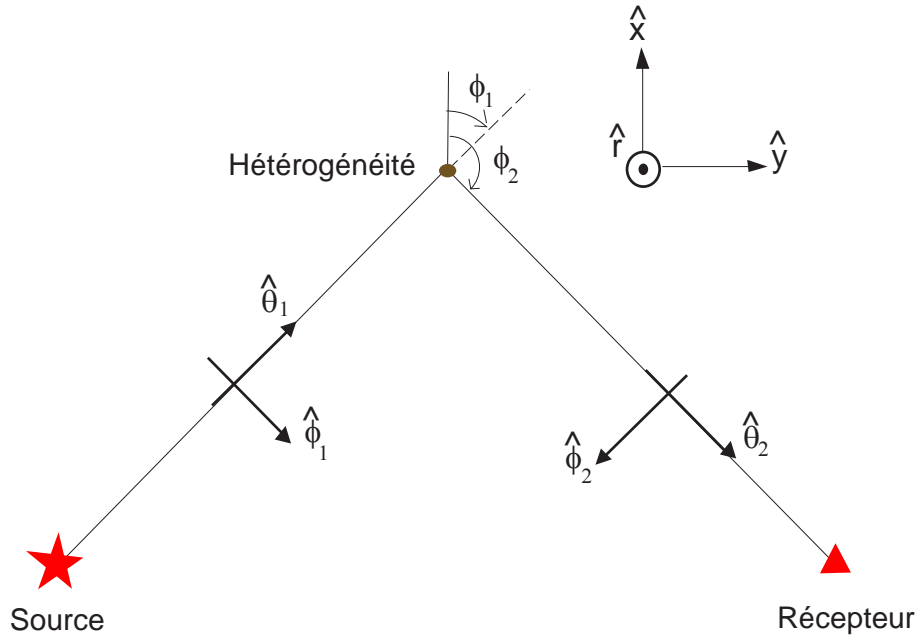


FIG. 6.9 – Représentation du système de coordonnées d'après Emery et al. (1999).

Dans le repère  $(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ , le vecteur déplacement correspondant à l'onde P diffusée montante s'écrit

$$\mathbf{D}^{-1}(P_{sc}^\uparrow) = \begin{pmatrix} \alpha_X \dot{\xi}_{sc} & \alpha_X p_{sc}/r_X \cos(\phi_2) & \alpha_X p_{sc}/r_X \sin(\phi_2) \end{pmatrix} \quad (6.91)$$

et celui de l'onde incidente descendante

$$\mathbf{D}(P_{in}^\downarrow) = \begin{pmatrix} -\alpha_X \dot{\xi}_{in} \\ \alpha_X p_{in}/r_X \cos(\phi_1) \\ \alpha_X p_{in}/r_X \sin(\phi_1) \end{pmatrix} \quad (6.92)$$

Dans l'approximation de Langer à l'ordre 0, on ne conserve que les termes dominants en  $\omega$ . On peut donc négliger les termes de dérivées par rapport à  $\phi_1$  ou  $\phi_2$ . Dans les dérivées par rapport à  $r_X$ , on néglige tous les termes sauf ceux en  $d\dot{\pi}/dr$ ,  $d\dot{\sigma}/dr$ ,  $d\dot{\pi}/dr$  et  $d\dot{\sigma}/dr$ . Les dérivées par rapport à  $\theta_X$  de plus haut degré en  $\omega$  sont :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta_X} Q^{(2)}(k_{in}, \cos(\theta_X - \theta_S)) &= i\omega Q^{(2)}(k_{in}, \cos(\theta_X - \theta_S)) \\ \frac{d}{d\theta_X} Q^{(2)}(k_{sc}, \cos(\theta_R - \theta_S)) &= -i\omega Q^{(2)}(k_{sc}, \cos(\theta_R - \theta_S)) \end{aligned} \quad (6.93)$$

Cependant, dans le repère  $(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ , on a besoin des dérivées par rapport à  $x$  et  $y$  :

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{r} \cos \phi \frac{df}{d\theta} \quad \frac{df}{dy} = \frac{1}{r} \sin \phi \frac{df}{d\theta} \quad (6.94)$$

## Eléments de la matrice de couplage

Les expressions suivantes sont indépendantes du choix de la base  $(\dot{\pi}, \dot{\sigma}, \dot{\pi}, \dot{\sigma})$  ou  $(\dot{\pi}, \dot{\sigma}, \ddot{\pi}, \ddot{\sigma})$ .

### Couplage P - P

Le terme de couplage P-P s'écrit en fonction des fonctions d'onde verticales et des lenteurs verticales généralisées

$$\begin{aligned} C_{P_{sc}P_{in}} &= \left( -i \frac{\omega^2 r_X^2}{2\rho_X \alpha_X^3} \right) \pi_{sc} \pi_{in} Q_{sc}^{(2)} Q_{in}^{(2)} \\ &\quad [\omega^2 \delta\rho (n_1(\xi_{sc}, \xi_{in}) + n_2(p_{sc}, p_{in}) \cos(\phi_2 - \phi_1)) \\ &\quad - \delta\lambda n_3(\xi_{sc}, p_{sc}, \xi_{in}, p_{in}) \\ &\quad - \delta\mu (n_4(\xi_{sc}, \xi_{in}) + n_5(\xi_{sc}, p_{sc}, \xi_{in}, p_{in}) \cos(\phi_2 - \phi_1) + \\ &\quad n_6(p_{sc}, p_{in}) \cos^2(\phi_2 - \phi_1))] \end{aligned} \quad (6.95)$$

Le couplage des ondes P-P est fonction de trois contributions  $\delta\rho$ ,  $\delta\mu$  et  $\delta\lambda$ . Les perturbations de la densité et des paramètres de Lamé peuvent être associées aux perturbations de la vitesse des ondes P et S :

$$2\rho\alpha\delta\alpha = \delta\lambda + 2\delta\mu - \delta\rho\alpha^2 \quad (6.96)$$

$$2\rho\beta\delta\beta = \delta\mu - \delta\rho\beta^2 \quad (6.97)$$

On peut donc réécrire de la façon suivante le terme de couplage

$$\begin{aligned}
C_{P_{sc}P_{in}} = & \left( -i \frac{\omega^2 r_X^2}{2\rho_X \alpha_X^3} \right) \pi_{sc} \pi_{in} Q_{sc}^{(2)} Q_{in}^{(2)} \\
& [\delta\rho(\omega^2 n_1 - 2\beta^2 n_4 + (2\beta^2 - \alpha^2)n_3 + (\omega^2 n_2 - 2\beta^2 n_5) \cos(\phi_2 - \phi_1) \\
& - 2\beta^2 n_6 \cos^2(\phi_2 - \phi_1)) \\
& - 2\rho\alpha\delta\alpha n_3 \\
& - 4\rho\beta\delta\beta (n_4 - n_3 + n_5 \cos(\phi_2 - \phi_1) + n_6 \cos^2(\phi_2 - \phi_1))] \quad (6.98)
\end{aligned}$$

Les termes  $n_i$  sont explicités dans l'Annexe E.

### Couplage P - SV

L'expression générale du couplage P-SV en fonction des fonctions d'onde verticales et des lenteurs verticales généralisées est

$$\begin{aligned}
C_{SV_{sc}P_{in}} = & \left( -i \frac{\omega^2 r_X^2}{2\rho_X \beta_X^3} \right) \sigma_{sc} \pi_{in} Q_{sc}^{(2)} Q_{in}^{(2)} \\
& [\omega^2 \delta\rho (n_1(p_{sc}, \xi_{in}) + n_2(\eta_{sc}, p_{in}) \cos(\phi_2 - \phi_1)) \\
& - \delta\mu (2n_3(\eta_{sc}, p_{sc}, \xi_{in}) + n_4(\eta_{sc}, p_{sc}, \xi_{in}, p_{in}) \cos(\phi_2 - \phi_1)) + \\
& 2n_5(\eta_{sc}, p_{sc}, p_{in}) \cos^2(\phi_2 - \phi_1))] \quad (6.99)
\end{aligned}$$

soit en fonction des perturbations de vitesse :

$$\begin{aligned}
C_{SV_{sc}P_{in}} = & \left( -i \frac{\omega^2 r_X^2}{2\rho_X \beta_X^3} \right) \sigma_{sc} \pi_{in} Q_{sc}^{(2)} Q_{in}^{(2)} \\
& [\delta\rho (\omega^2 n_1 - 2\beta^2 n_3 + (\omega^2 n_2 - \beta^2 n_4) \cos(\phi_2 - \phi_1) - 2\beta^2 n_5 \cos^2(\phi_2 - \phi_1)) \\
& - 2\rho\beta\delta\beta (2n_3 + n_4 \cos(\phi_2 - \phi_1) + 2n_5 \cos^2(\phi_2 - \phi_1))] \quad (6.100)
\end{aligned}$$

Aucun terme en  $\delta\lambda$  ou  $\delta\alpha$  ne couple une onde P avec une onde SV (Gibson et Ben-Menahem, 1991).

### Couplage SV - P

L'expression générale du couplage SV-P selon les fonctions d'onde verticales et les lenteurs verticales généralisées est

$$\begin{aligned}
C_{P_{sc}SV_{in}} = & \left( -i \frac{\omega^2 r_X^2}{2\rho_X \alpha_X^3} \right) \pi_{sc} \sigma_{in} Q_{sc}^{(2)} Q_{in}^{(2)} \\
& [\omega^2 \delta\rho (n_1(\xi_{sc}, p_{in}) + n_2(p_{sc}, \eta_{in}) \cos(\phi_2 - \phi_1)) \\
& - \delta\mu (2n_3(\xi_{sc}, p_{in}, \eta_{in}) + n_4(\xi_{sc}, p_{sc}, \eta_{in}, p_{in}) \cos(\phi_2 - \phi_1)) + \\
& 2n_5(p_{sc}, \eta_{in}, p_{in}) \cos^2(\phi_2 - \phi_1))] \quad (6.101)
\end{aligned}$$

Comme pour le couplage P-SV, il n'y a pas de contribution en  $\delta\lambda$ .

$$C_{P_{sc}SV_{in}} = \left( -i \frac{\omega^2 r_X^2}{2\rho_X \alpha_X^3} \right) \pi_{sc} \sigma_{in} Q_{sc}^{(2)} Q_{in}^{(2)} \\ [\delta\rho \left( \omega^2 n_1 - 2\beta^2 n_3 + (\omega^2 n_2 - \beta^2 n_4) \cos(\phi_2 - \phi_1) - 2\beta^2 n_5 \cos^2(\phi_2 - \phi_1) \right) \\ - 2\rho\beta\delta\beta \left( 2n_3 + n_4 \cos(\phi_2 - \phi_1) + 2n_5 \cos^2(\phi_2 - \phi_1) \right)] \quad (6.102)$$

### Couplage SV - SV

L'expression générale du couplage SV-SV en fonction des fonctions d'onde verticales et des lenteurs verticales généralisées est

$$C_{SV_{sc}SV_{in}} = \left( -i \frac{\omega^2 r_X^2}{2\rho_X \beta_X^3} \right) \sigma_{sc} \sigma_{in} Q_{sc}^{(2)} Q_{in}^{(2)} \\ [\omega^2 \delta\rho (n_1(p_{sc}, p_{in}) + n_2(\eta_{sc}, \eta_{in}) \cos(\phi_2 - \phi_1)) \\ - \delta\mu (2n_3(\eta_{sc}, p_{sc}, \eta_{sc}, p_{in}, \eta_{in}) + n_4(\eta_{sc}, p_{sc}, \eta_{in}, p_{in}) \cos(\phi_2 - \phi_1) + \\ 2n_5(\eta_{sc}, p_{sc}, \eta_{in}, p_{in}) \cos^2(\phi_2 - \phi_1))] \quad (6.103)$$

Le couplage des ondes SV-SV est indépendant de  $\delta\lambda$ .

$$C_{SV_{sc}SV_{in}} = \left( -i \frac{\omega^2 r_X^2}{2\rho_X \beta_X^3} \right) \sigma_{sc} \sigma_{in} Q_{sc}^{(2)} Q_{in}^{(2)} \\ [\delta\rho \left( \omega^2 n_1 - 2\beta^2 n_3 + (\omega^2 n_2 - \beta^2 n_4) \cos(\phi_2 - \phi_1) - 2\beta^2 n_5 \cos^2(\phi_2 - \phi_1) \right) \\ - 2\rho\beta\delta\beta \left( 2n_3 + n_4 \cos(\phi_2 - \phi_1) + 2n_5 \cos^2(\phi_2 - \phi_1) \right)] \quad (6.104)$$

### Interprétation de la matrice de couplage

Examinons tout d'abord les dimensions de la matrice de couplage afin de vérifier ensuite les dimensions de l'équation (6.85). Prenons par exemple la contribution en  $\delta\rho$  au couplage P-P :

$$C_{P_{in}P_{sc}} = \left( -i \frac{\omega^2 r_X^2}{2\rho_X \alpha_X^3} \right) \pi_{sc} \pi_{in} Q_{sc}^{(2)} Q_{in}^{(2)} \delta\rho \omega^2 n_1 \quad (6.105)$$

D'après l'annexe E, on peut vérifier que  $[n_1] = [L]^{-2}$ . Sachant que les fonctions de Legendre et les fonctions d'onde sont sans dimension alors :

$$[C_{P_{in}P_{sc}}] = \frac{1}{[T]^2} \frac{[L]^3}{[M]} \frac{[T]^3}{[L]^3} [L]^2 \cdot \frac{1}{[T]^2} \frac{[M]}{[L]^3} \cdot \frac{1}{[L]} = \frac{1}{[L][T]} \quad (6.106)$$

On peut alors vérifier les dimensions de l'expression du champ diffusée (6.85) sachant que  $k_{in,sc}$  est sans dimension, de même que les matrices  $\mathbf{R}_{1,2}$  et  $\mathbf{T}_{u,d}$ , et que  $[f(r_s)] = [L]^3$  (voir les expressions (6.29) et (6.30) caractérisant une source) :

$$[\delta u(\omega)] = [L]^3 \frac{[T]^2}{[L]^4} \cdot \frac{1}{[L][T]} [L]^3 = [L][T] \quad (6.107)$$

On retrouve bien les dimensions d'un déplacement.

Comme pour des ondes planes, l'interaction du champ de déplacement avec une hétérogénéité caractérisée par des perturbations en  $(\delta\rho, \delta\lambda, \delta\mu)$  ou en  $(\delta\rho, \delta\alpha, \delta\beta)$ , introduit un couplage entre les ondes P et SV. Le facteur  $\omega^2$  apparaît dans tous les termes de couplage puisqu'il y a pour chaque terme une dérivée de chacun des tenseurs de Green. Le spectre de l'onde diffusée correspond donc au spectre de l'onde incidente multiplié par  $\omega^2$  comme dans le cas de la diffusion de Rayleigh.

Une perturbation  $\delta\lambda$  ou  $\delta\alpha$  ne produit pas de couplage entre deux ondes SV ou entre une onde P et une onde SV. La matrice de couplage dépend de la différence entre l'azimut des deux ondes  $(\phi_2 - \phi_1)$ . Dans l'approximation de Langer, l'angle d'incidence  $i$  par rapport à la verticale est contenu dans le paramètre de rai  $p$  et dans les lenteurs radiales  $\xi$  et  $\eta$ . On peut montrer que les expressions développées ici sont compatibles avec les résultats de la théorie des rais : seule la diffusion P-P par une perturbation  $\delta\alpha$  est isotrope, et dans l'hypothèse de "forward scattering" seule  $\delta\alpha$  contribue lors d'une diffusion P-P et  $\delta\beta$  pour une diffusion SV-SV (tous les autres termes sont négligeables).

### 6.4.5 Résultats préliminaires

Pour cette étude, nous avons adapté aux cas des ondes P, les programmes développés par Emery (1997) pour les ondes  $S_{diff}$  à partir des codes de Cormier et Richards (1988).

Nous présenterons dans ce paragraphe les résultats préliminaires obtenus pour le calcul du champ de déplacement des ondes  $P_{diff}$  diffusées par une hétérogénéité de vitesse dans la couche D". Résumons quelques éléments de la mise en oeuvre numérique :

- Dans cette configuration, on peut encore utiliser le même contour d'intégration pour les paramètres incidents  $p_{in}$  et diffusé  $p_{sc}$ . Ces contours sont proches de celui proposé pour calculer le spectre de la phase de référence, avec cependant une diminution de la longueur du segment CD. Par ailleurs, dans certaines configurations géométriques source-point diffractant-récepteur, le rai géométrique incident ou diffusé peut être caractérisé par un paramètre de rai inférieur au paramètre critique. Il faut donc choisir la longueur et la position du segment BC sur l'axe réel pour tenir compte de ces différentes configurations.
- Des problèmes de divergence apparaissent aux hautes fréquences si bien que nous ne calculerons les spectres diffusés que jusqu'à 0.25Hz.
- Nous négligerons le couplage P-S. En effet, des ondes diffusées qui présenteraient une conversion P-S ou S-P ont des temps de propagation très différents de la phase

P de référence.

- La matrice  $\mathbf{R}_1(k_{sc})\mathbf{C}(k_{sc}, k_{in}, r_X)\mathbf{R}_2(k_{in})$  est calculée pour deux bases différentes de fonction d'onde verticale. D'après Kennett et Illingworth (1981), on choisit la base avec l'onde stationnaire  $(\xi, \check{\xi})$  si le rai tourne au-dessus de l'anomalies, et la base avec les ondes montantes et descendantes  $(\xi, \dot{\xi})$  si le rai tourne sous l'hétérogénéité.

Afin de vérifier la stabilité numérique des calculs en fonction de la fréquence et du contour, nous avons examiné quelques étapes intermédiaires du calculs de  $\mathbf{R}_1(k_{sc})\mathbf{C}(k_{sc}, k_{in}, r_X)\mathbf{R}_2(k_{in})$ . Par exemple, la figure 6.10 montre les variations de l'élément de la matrice  $\mathbf{R}_{D''}$  qui décrit la réflexion des ondes P au sommet de la couche D'' en fonction de la fréquence et de la valeur absolue du paramètre de rai incident. On reconnaît le coefficient de réflexion des ondes P à la CMB pour les paramètres de rai appartenant au segment réel BC.

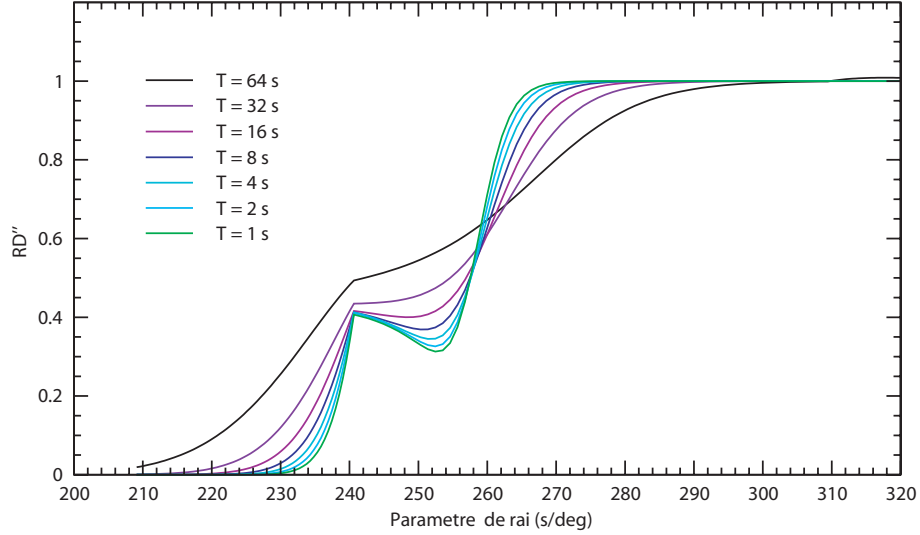


FIG. 6.10 – Coefficient de réflexion généralisé pour les ondes P au sommet de la couche D'' : variations en fonction du paramètre de rai (valeur absolu) et de la période.

L'examen du terme de couplage P-P en fonction des paramètres de rai incident et diffusé permet de justifier le choix du contour d'intégration (figure 6.11) : on peut ainsi s'assurer que toutes les valeurs des paramètres de rais pour lesquelles le couplage est non-nul sont bien prises en compte. A basse fréquence, il faut généralement que le domaine en  $|p|$  soit assez important, mais à haute fréquence la réduction des segments complexes peut induire l'apparition de phases numériques.



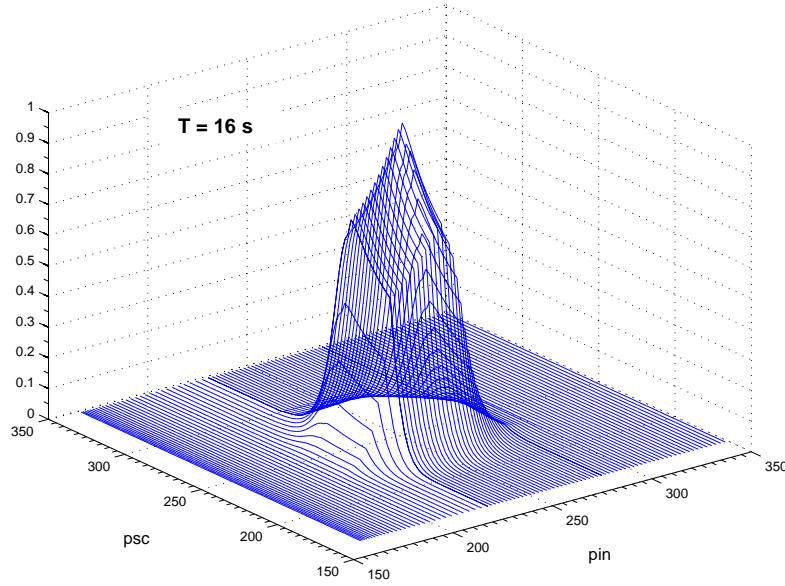


FIG. 6.11 – Terme P-P de la matrice  $\mathbf{R}_1(k_{sc})\mathbf{C}(k_{sc}, k_{in}, r_X)\mathbf{R}_2(k_{in})$  (normalisé) traduisant le couplage entre une onde P incidente et une onde P diffusée par une hétérogénéité située à une profondeur de 3485 km pour une période de 16 s. Le couplage a été calculé pour une perturbation de vitesse  $\delta\alpha$ . Dans la configuration où la branche incidente et la branche diffusée sont diffractées à la CMB, comme le terme en  $\delta\alpha$  est indépendant de l'angle de diffusion, on s'attend à ce que le couplage soit maximal pour des paramètres de rai incident et diffusé correspondant au paramètre critique des ondes P dans le manteau (soit environ 254 s/rad).

Examinons enfin le spectre de l'onde diffusée. Prenons le cas où une hétérogénéité est placée sur le grand cercle entre la source (à 500 km de profondeur) et le récepteur, pour une distance épacentrale de  $110^\circ$ . Les spectres sont toujours calculés dans le modèle ak135 et pour une source explosive. Nous avons vu que le terme de couplage est proportionnel à  $\omega^2$ . On observe en effet que les spectres obtenus pour des anomalies situées à un rayon autour de 3520 km présentent l'allure d'une parabole assez régulière (figure 6.12a). On observe une augmentation de l'amplitude avec le rayon. On a examiné ensuite l'effet du déplacement de la perturbation selon le grand cercle (figure 6.12b). Pour une distance épacentrale de  $110^\circ$ , la zone de diffraction prédite par la théorie des rais s'étend entre environ  $50^\circ$  et  $60^\circ$  de la source. En règle générale, quand on s'éloigne de cette zone de diffraction, on observe une diminution de l'amplitude. Par contre, si on s'éloigne trop,

les spectres deviennent instables (Emery, 1997). Cela indique vraisemblablement qu'il faut adapter les contours en fonction de la position du point diffractant, en jouant sur la longueur du segment réel BC et sur sa position par rapport au paramètre critique pour les ondes P dans le manteau.

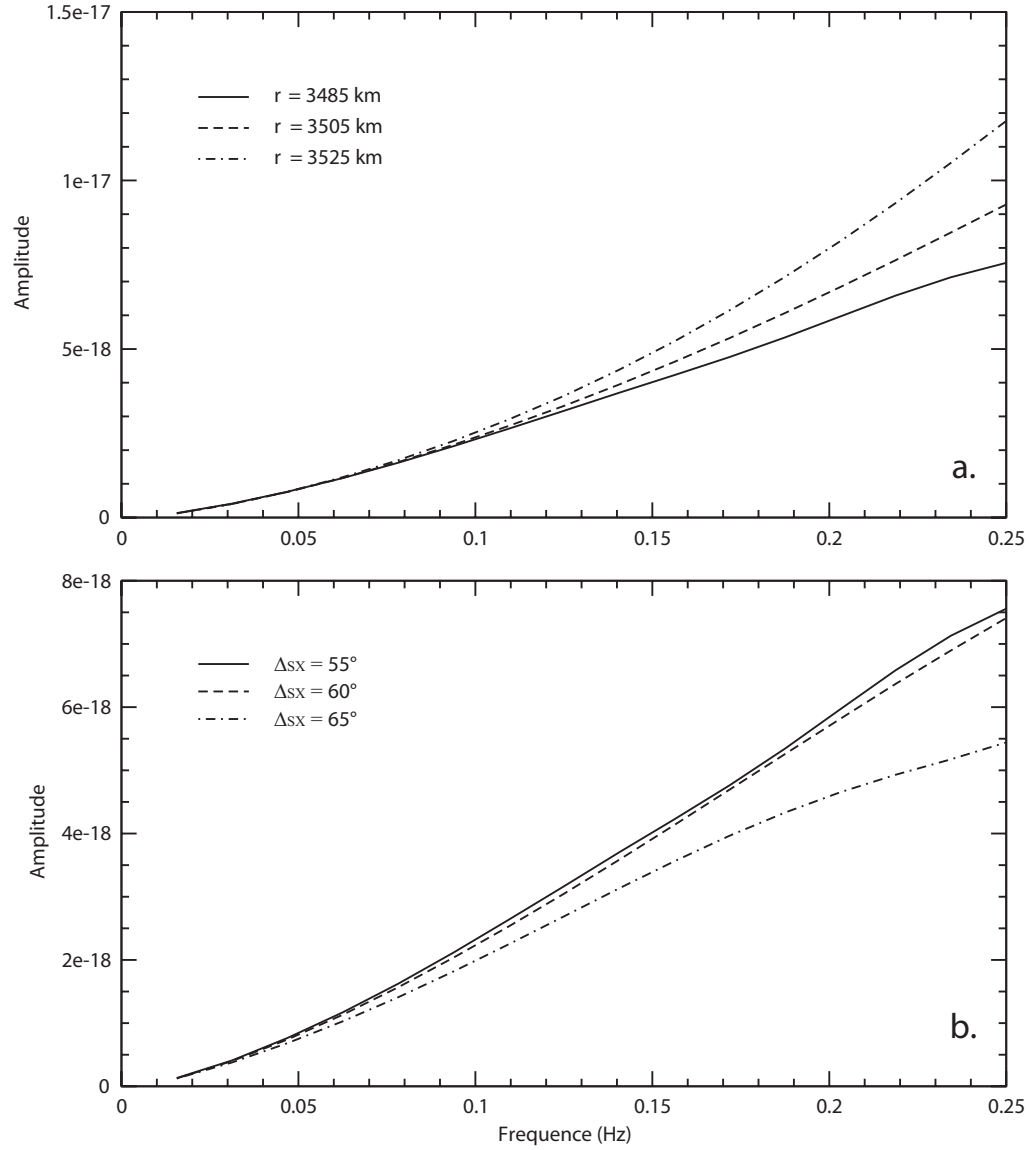


FIG. 6.12 – Exemples de spectres pour une onde  $P_{diff}$  diffusée par une perturbation de vitesse de 1% pour une distance épicentrale de  $110^\circ$ . (a) Variation de la position radiale de l'anomalies ( $r = 3485, 3505, 3525$  km) : on vérifie bien que les spectres sont proportionnels à  $\omega^2$ . (b) Variation de la position de l'hétérogénéité dans le grand cercle ( $\Delta_{SX} = 55^\circ, 60^\circ, 65^\circ$ ).

La figure 6.13 montre le noyau de sensibilité d'une onde  $P_{diff}$  pour une distance

épicentrale de  $110^\circ$  et une source explosive à 500 km de profondeur, et calculé à la CMB. Le calcul a été réalisé pour une source ponctuelle. La distribution de la sensibilité sera fonction du contenu fréquentiel de la source. De façon similaire au noyau de sensibilité des ondes  $SH_{diff}$  (Zhao et al., 2000), les zones de Fresnel à la CMB ont une forme elliptique avec le grand axe dans la direction source-récepteur. Par ailleurs, la sensibilité de l'onde est très légèrement positive sur le rai de référence lorsque celui-ci est guidé le long de la CMB : une anomalie de vitesse rapide courte longueur d'onde serait susceptible de retarder l'onde (cette caractéristique est déjà observée pour le noyau de sensibilité d'une  $SH_{diff}$ , même si elle peut être fortement dépendante du contenu fréquentiel de la source). Par contre à grande longueur d'onde, la sensibilité négative du noyau domine et une anomalie positive de vitesse avance l'onde.

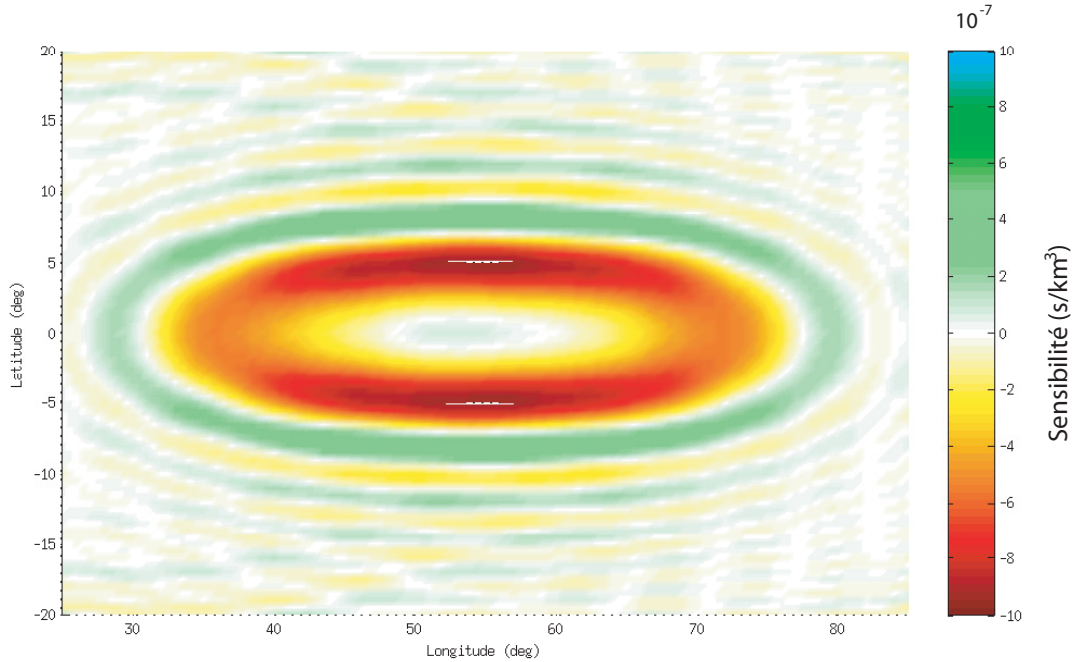


FIG. 6.13 – Section à la CMB du noyau de sensibilité en temps de propagation d'une onde  $P_{diff}$  d'une distance épiscopentrale de  $110^\circ$  et une source à 500 km de profondeur. La source et le récepteur sont placés à l'équateur. Le noyau a été calculé pour une source  $s(t) = \delta(t)$ .

## 6.5 Perspectives et Conclusions

Ces premiers éléments du calcul des noyaux de sensibilité des ondes  $P_{diff}$  sont particulièrement encourageants. L'approximation de Langer nous permet de décrire correctement l'amplitude des ondes  $P_{diff}$  contrairement à l'approximation des rais. Par ailleurs, on a pu vérifier que l'expression des termes de couplage obtenue est compatible avec l'expression des coefficients de scattering développées au chapitre 2 (voir Annexe E).

L'étape suivante consiste maintenant à déplacer le point diffractant dans l'ensemble du volume du manteau et à vérifier le raccord des théories quand le couplage est calculé avec la théorie WKBJ. L'élément le plus critique sera vraisemblablement le choix du contour d'intégration pour la phase incidente et diffusée en fonction des configurations géométriques source-point diffractant-récepteur. Enfin, la structure générale du code nécessite un certain nombre de remaniements et de perfectionnements pour permettre un calcul plus efficace et en routine des noyaux de sensibilité. Finalement, on espère utiliser cette méthode pour compléter le calcul des noyaux de sensibilité de la phase PKP(AB) qui nécessite la prise en compte des phases diffractées (voir chapitre 5).

À la CMB, on constate que la sensibilité de l'onde  $P_{diff}$  s'étale sur une zone de l'ordre de  $1200 \times 1200$  km. Même si la structure du noyau est fortement dépendante du contenu fréquentiel de la source, on peut s'interroger sur les conséquences de la distribution de la sensibilité au niveau du rai de référence (sensibilité légèrement positive sur le rai à la CMB) pour la résolution des petites structures dans la couche D''.

A l'échelle globale, l'utilisation des phases PKP et  $P_{diff}$  permet d'améliorer la résolution des images tomographiques dans le manteau inférieur (Karason et van der Hilst, 2001) et d'augmenter la couverture sismique (Valenzuela et Wyssession, 1998). À partir des temps différentiels PKP(DF)- $P_{diff}$  et en tenant compte de la largeur de la zone Fresnel des ondes  $P_{diff}$  (résolution des longueurs d'onde supérieures à 2000 km, pour une onde  $P_{diff}$  de 20 s de période dominante), Wyssession (1996) a imagé les variations à grande longueur d'onde de la vitesse des ondes P. L'utilisation des noyaux de sensibilité devrait permettre d'augmenter la résolution sous réserve d'une bonne couverture. Par ailleurs, les écarts observés entre les tomographies en ondes S et P suggèrent des variations importantes du coefficient de Poisson dans la couche D'' (Wyssession, 1996). Or, la méthode proposée dans ce chapitre pour le calcul des noyaux de sensibilité des ondes  $P_{diff}$  s'adapte aux ondes  $S_{diff}$ . L'utilisation de ces noyaux pour obtenir une tomographie en ondes P et en ondes S du manteau inférieur donnerait accès au coefficient de Poisson dans la couche D'', et permettrait de discuter la nature chimique et thermique des hétérogénéités observées.

Enfin, une utilisation correcte des noyaux des  $P_{diff}$  nécessite la construction d'un jeu de données pour les ondes  $P_{diff}$  : mesure du temps de propagation (cross-corrélation) et du contenu fréquentiel de la source.

# Chapitre 7

## Conclusions et Perspectives

Dans cette thèse, j'ai étendu la théorie développée par Dahlen et al. (2000) pour décrire la sensibilité 3D des ondes PKP dans un milieu isotrope et transverse isotrope. Pour l'étude de la graine anisotrope, il s'agissait dans un premier temps de prendre en compte des perturbations anisotropes du milieu élastique et de calculer les noyaux de sensibilité correspondants. Pour les noyaux des ondes PKP(AB), il s'avère indispensable de prendre en compte la diffraction à la CMB.

### Noyaux anisotropes des ondes PKP(DF) et étude de la graine anisotrope

Dans le cadre de l'approximation de Born, nous avons montré que la diffusion d'une onde de volume P ou S par une perturbation transverse isotrope est caractérisée par cinq matrices de scattering. Afin de décrire correctement une perturbation transverse isotrope, il est nécessaire d'introduire les perturbations isotropes des vitesses de phase  $\alpha$  et  $\beta$ , et trois paramètres anisotropes  $\epsilon$ ,  $\delta$  et  $\gamma$ . L'expression de ces matrices de diffusion est indépendante du type d'interaction. Par ailleurs, la méthode peut être adaptée à d'autres types d'anisotropie. À partir de ces matrices de scattering, on peut ainsi définir cinq noyaux de sensibilité décrivant la sensibilité des ondes à une perturbation transverse isotrope du milieu. Dans le cas des ondes P, on pourra négliger les contributions en  $\beta$  et  $\gamma$ .

Dans la graine, les noyaux de sensibilité des ondes PKP(DF) pour les temps de propagation présentent une structure typique en "banana-doughnut" (Hung et al., 2000). Les noyaux anisotropes et isotropes ont la même allure. Cependant, le signe et l'amplitude des

noyaux  $K_\epsilon$ ,  $K_\delta$  et  $K_\gamma$  dépendent de l'orientation de l'onde par rapport à l'axe de symétrie. Compte-tenu de leur longue trajectoire dans la Terre, les ondes PKP(DF) échantillonnent un volume important de la graine. Pour une période dominante de 2 s, le diamètre de la zone de Fresnel est d'environ 550 km, ce qui correspond pratiquement au volume de la sous-graine proposée par Ishii et Dziewonski (2002).

À ce jour, il n'existe pas de réel consensus sur les variations en profondeur de l'anisotropie de la graine. Ishii et Dziewonski (2002) ont observé un changement du comportement anisotrope de la graine lors de l'analyse des résidus des ondes PKP(DF) dans la gamme de distances épacentrales  $173^\circ - 180^\circ$ . Ils ont ainsi proposé l'existence d'une sous-graine de 300 km de rayon avec une forte augmentation des paramètres anisotropes au centre. À la même époque, Beghein et Trampert (2003) ont obtenu un modèle de graine avec un changement de signe de  $\epsilon$  autour de  $r \sim 450$  km traduisant un basculement progressif de l'axe de symétrie. Ce modèle obtenu par inversion des modes propres donne des prédictions qui sont en bon accord avec les résidus des ondes de volume. Le problème de la structure profonde de la graine anisotrope n'est donc pas résolu de façon unique. Afin de tester l'existence d'une sous-graine, nous avons réalisé une série d'inversions des résidus des ondes PKP(DF). Nous avons utilisé le fichier EHB (Engdahl et al., 1998), le modèle de référence ak135 (Kennett et al., 1995), et deux méthodes d'analyse statistique des données. Enfin, nous avons comparé le résultat des inversions avec la théorie des rais et avec les noyaux de sensibilité. Finalement, compte tenu de la paramétrisation du modèle, du moyennage des données en rais résumés et en distance épacentrale, et de la faible résolution des données, l'utilisation des noyaux de sensibilité n'apporte pas de progrès significatifs par rapport à la théorie des rais. Par contre, on observe toujours un changement du comportement anisotrope pour un rayon compris entre 400 km et 600 km. L'introduction d'une information a priori dans l'inversion conduit principalement à trois familles de graine anisotrope. Le modèle I est similaire à celui proposé par Beghein et Trampert (2003) avec un axe de symétrie lent parallèle à l'axe de rotation de la Terre dans une sous-graine d'environ 450 km de rayon. Le modèle II propose une sous-graine de 450 km de rayon avec un taux d'anisotropie nul (ce modèle est proche de celui proposé par Ishii et al. (2002a)). Enfin, dans le modèle III, le taux d'anisotropie augmente dans la sous-graine qui a un rayon de 550 km et l'axe de symétrie est parallèle à l'axe de rotation de la Terre. La variabilité des modèles de graine obtenus n'apporte pas vraiment de nouvelles contraintes sur l'origine de l'anisotropie. Une augmentation du taux d'anisotropie pourrait indiquer un changement de phase, un alignement plus cohérent des cristaux de fer, ou encore des variations chimiques résultant de la différenciation de la graine.

Par contre, un changement de signe de  $\epsilon$  pourrait indiquer un changement du système de glissement à haute pression, un changement de texture associé au régime convectif dans la graine (si ce dernier est possible) ou encore un changement de phase.

Contraindre la structure profonde de la graine passe avant tout par une augmentation de la couverture sismique et en particulier du nombre de données polaires. Le développement de nouvelles techniques d'analyse de formes d'onde est susceptible d'augmenter de façon significative le nombre de données de bonne qualité (Garcia et al., 2006). De plus, ces méthodes permettent d'extraire simultanément le temps de propagation, l'amplitude et le contenu fréquentiel des ondes, nécessaire pour utiliser correctement les noyaux de sensibilité. On peut aussi envisager d'utiliser d'autres types d'ondes telles que les phases PKPPKP.

Les progrès de la recherche sur la physique des hautes pressions et températures sont considérables, tant sur le plan expérimental que théorique. Cependant, il demeure encore des incertitudes sur la structure cristalline de l'alliage de fer stable dans la graine et sur ses propriétés élastiques. Une connaissance plus précise des propriétés élastiques et plastiques du fer permettrait de mieux comprendre l'anisotropie de la graine et son origine.

## Noyaux de sensibilités des ondes PKP et $P_{diff}$ dans le manteau

Le développement de la théorie des noyaux de sensibilité permet de prendre en compte le contenu fréquentiel des ondes dans les inversions tomographiques. Les travaux de Montelli et al. (2004a) suggèrent que les noyaux de sensibilité permettent de résoudre des anomalies jusqu'alors trop faibles pour être détectées par la théorie des rais comme les panaches mantelliques.

Les temps différentiels des ondes PKP permettent d'explorer la base du manteau (Sylvander et Souriau, 1996). L'utilisation de ces phases dans les tomographies sismiques est cruciale pour imager les anomalies de vitesse du manteau inférieur (Wyssession, 1996; Karason et van der Hilst, 2001). Les noyaux de sensibilité des ondes PKP devraient donc être très utiles pour les tomographies futures de la couche D". Au voisinage de la triplication, les différentes phases PKP arrivent dans la même fenêtre temporelle et interfèrent, si bien que ces ondes échantillonnent le milieu de façon assez complexe. En fonction de la distance épacentrale, ces noyaux n'ont pas toujours une forme simple en "banana-doughnut". La structure des noyaux différentiels AB-DF confirme que les résidus différentiels sont vrai-



semblablement très sensibles à la présence d'hétérogénéités dans la couche D'' (Bréger et al., 2000). Il serait donc préférable de corriger ces résidus des anomalies du manteau inférieur, si on souhaite les utiliser pour étudier la structure anisotrope de la graine. Par ailleurs, la structure des noyaux de sensibilité des phases PKP(AB) montre clairement qu'il est nécessaire d'introduire la contribution des ondes P diffractées à la CMB. Cependant, la méthode proposée par Dahlen et al. (2000) étant basée sur la théorie des rais, elle ne permet donc pas de décrire l'amplitude des ondes au voisinage d'une discontinuité.

L'approximation de Langer permet de modéliser l'amplitude des ondes au voisinage d'une interface. Si on cherche à modéliser les effets de diffusion par une hétérogénéité sur les ondes diffractées, il faut combiner l'approximation de Langer et l'approximation de Born. Nous avons adapté le travail de Emery et al. (1999) pour les ondes S aux ondes P. Comme précédemment, on exprime une matrice de couplage décrivant les interactions entre les ondes pour une perturbation donnée, en distinguant cette fois-ci les ondes P et SV montantes ou descendantes. La principale difficulté de cette méthode réside dans le choix des contours d'intégration dans le plan complexe. Ce choix devient même critique à haute fréquence. Cependant, les premiers résultats sur le calcul des noyaux de sensibilité des ondes  $P_{diff}$  sont encourageants. On peut envisager d'adapter la méthode pour le calcul complet de la phase PKP(AB) dans le manteau ou pour prendre en compte la contribution des ondes PKP(BC) diffractées à l'ICB dans le calcul des noyaux de sensibilité de la phase PKP(DF) dans la graine. Il faudra cependant être capable de considérer les hautes fréquences et de gérer la complexité des contours d'intégration associés aux phases PKP au voisinage de la triPLICATION (Cormier et Richards, 1977). La méthode développée dans cette thèse pour calculer la sensibilité 3D des ondes  $P_{diff}$  s'avère également plus efficace numériquement que les méthodes basées sur le couplage de mode pour les ondes P hautes fréquences (Zhao et al., 2000).

Les ondes  $P_{diff}$  ont une bonne résolution aux variations latérales de vitesse dans la couche D'' et permettent d'augmenter la couverture spatiale des données (Valenzuela et Wysession, 1998). L'utilisation de cette phase dans les inversions tomographiques est susceptible d'apporter un gain de résolution dans le manteau inférieur. Cependant, il n'existe pas encore à ce jour de fichiers de données sur les  $P_{diff}$  contenant toutes les informations requises pour utiliser les noyaux de sensibilité. Une des étapes suivantes du travail amorcé dans cette thèse sera de constituer ce fichier. L'analyse des formes d'ondes par Garcia et al. (2006) a permis de construire un fichier de données sur les PKP contenant toutes les informations nécessaires pour utiliser correctement les noyaux lors d'une inversion (résidus, contenu fréquentiel, ...). L'inversion des formes d'onde par

recuit simulé permet d'exploiter des données bruitées (Chevrot, 2002) et d'extraire les temps différentiels et la forme d'onde des PKP lorsqu'elles interfèrent sur le sismogramme (Garcia et al., 2004), ou en présence des phases de profondeur (Garcia et al., 2006). Cette méthode a donc permis d'exploiter des données que l'on avait tendance à rejeter auparavant. On pourra ensuite envisager d'utiliser conjointement les données du fichier EHB, celles collectées par Garcia et al. (2006) et les données de  $P_{diff}$  pour obtenir une tomographie globale du manteau en onde P. On souhaiterait également examiner plus précisément les régions où ont été observées des anomalies des temps différentiels AB-BC (Luo et al., 2001; Garcia et al., 2004).

Par ailleurs, la méthode développée au chapitre 6 permet également d'obtenir les noyaux de sensibilité de la phase  $S_{diff}$ . On dispose donc d'outils intéressants pour discuter la nature thermique ou chimique des hétérogénéités dans le manteau. Enfin, on peut envisager de généraliser nos résultats sur les noyaux des ondes diffractées au cas de perturbations transverses isotropes afin d'étudier l'anisotropie radiale de la couche D" (Kendall et Silver, 1996; Moore et al., 2004). L'étude de l'anisotropie azimutale de la couche D" (Vinnik et al., 1989; Maupin, 1994; Garnero et al., 2004) avec les noyaux de sensibilité est également envisageable, mais chercher l'orientation de l'axe de symétrie rend le problème inverse non linéaire.



# Annexe A

## Théorème de représentation

### A.1 Théorème de représentation

On considère un déplacement  $\mathbf{u}^{(1)}$  généré par une force ponctuelle  $\mathbf{f}^{(1)}$  au point  $\mathbf{r}_1$  et un déplacement  $\mathbf{u}^{(2)}$  généré par une force ponctuelle  $\mathbf{f}^{(2)}$  au point  $\mathbf{r}_2$ , vérifiant l'équation d'onde :

$$\begin{aligned}\rho\omega^2 u_i^{(1)} + \partial_j c_{ijkl} \partial_k u_l^{(1)} &= -f_i^{(1)} \\ \rho\omega^2 u_i^{(2)} + \partial_j c_{ijkl} \partial_k u_l^{(2)} &= -f_i^{(2)}\end{aligned}\quad (\text{A.1})$$

On multiplie la première équation par  $\mathbf{u}^{(2)}$  que l'on soustrait à la seconde multipliée par  $\mathbf{u}^{(1)}$  et on intègre sur un volume  $V$  :

$$\int \left\{ u_i^{(2)} \partial_j c_{ijkl} \partial_k u_l^{(1)} - u_i^{(1)} \partial_j c_{ijkl} \partial_k u_l^{(2)} \right\} dV = - \int \left\{ f_i^{(1)} u_i^{(2)} - f_i^{(2)} u_i^{(1)} \right\} dV \quad (\text{A.2})$$

Sur le terme de gauche, on effectue une intégration par partie puis on applique le théorème de Gauss :

$$\begin{aligned}& \oint \left\{ n_j u_i^{(2)} c_{ijkl} \partial_k u_l^{(1)} - n_j u_i^{(1)} c_{ijkl} \partial_k u_l^{(2)} \right\} dS \\ & - \int \left\{ (\partial_j u_i^{(2)}) c_{ijkl} \partial_k u_l^{(1)} - (\partial_j u_i^{(1)}) c_{ijkl} \partial_k u_l^{(2)} \right\} dV \\ & = - \int \left\{ f_i^{(1)} u_i^{(2)} - f_i^{(2)} u_i^{(1)} \right\} dV\end{aligned}\quad (\text{A.3})$$

Le tenseur élastique possède les propriétés de symétrie suivantes :

$$c_{ijkl} = c_{jikl} \quad (\text{A.4})$$

$$c_{ijkl} = c_{ijlk} \quad (\text{A.5})$$

$$c_{ijkl} = c_{klij} \quad (\text{A.6})$$

De plus, on peut écrire

$$(\partial_j u_i^{(1)}) c_{ijkl} \partial_k u_l^{(2)} = (\partial_k u_l^{(1)}) c_{lkji} \partial_j u_i^{(2)} \quad (\text{A.7})$$

et comme  $c_{lkji} = c_{ijkl}$  alors le deuxième terme d'intégration en  $V$  de l'élément de gauche de l'équation (A.3) est nul. Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned} \oint \{ n_j u_i^{(2)} c_{ijkl} \partial_k u_l^{(1)} - n_j u_i^{(1)} c_{ijkl} \partial_k u_l^{(2)} \} dS \\ = - \int \{ f_i^{(1)} u_i^{(2)} - f_i^{(2)} u_i^{(1)} \} dV \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

On considère que les forces sont ponctuelles donc  $f_i^{(1)} = \delta_{in}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$  et  $f_i^{(2)} = \delta_{in}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)$ . Dans le cas d'une force ponctuelle, la solution de l'équation du mouvement est le tenseur de Green :  $u_i^{(1)}(\mathbf{r}) = G_{in}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$  et  $u_i^{(2)}(\mathbf{r}) = G_{in}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)$ . Alors  $\int f_i^{(1)} u_i^{(2)} dV = \int \delta_{in}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) G_{in}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) = G_{nm}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ . Le terme de gauche de (A.8) se réduit donc à  $G_{mn}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) - G_{nm}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)$ . De plus, si le tenseur de Green vérifie les conditions de traction nulle sur la surface  $S$  alors  $n_j c_{ijkl} \partial_k G_{ln} = 0$  et l'intégrale sur  $S$  est nulle. L'équation (A.8) se réduit à

$$G_{mn}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = G_{nm}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) \quad (\text{A.9})$$

Il s'agit du théorème de réciprocité. Lorsqu'on échange la position de la source et du récepteur, on obtient le même déplacement : la composante  $n$  du déplacement en  $\mathbf{r}_1$  engendrée par une excitation ponctuelle dans la direction  $m$  au point  $\mathbf{r}_2$  est égale à la composante  $m$  du déplacement en  $\mathbf{r}_2$  engendrée par une excitation ponctuelle dans la direction  $n$  au point  $\mathbf{r}_1$ .

Si dans l'expression (A.8), on remplace  $u_i^{(2)}(\mathbf{r})$  par  $G_{in}(\mathbf{r}, \mathbf{x})$  et  $f_i^{(2)}$  par  $\delta_{in}(\mathbf{r} - \mathbf{x})$  et en utilisant le théorème de réciprocité, on obtient :

$$\begin{aligned} u_n(\mathbf{r}) = \int G_{ni}(\mathbf{r}, \mathbf{x}) f_i(\mathbf{x}) dV \\ + \oint \{ G_{ni}(\mathbf{r}, \mathbf{x}) n_j c_{ijkl} \partial_k u_l(\mathbf{x}) - u_i(\mathbf{x}) n_j c_{ijkl} \partial_k G_{ln}(\mathbf{r}, \mathbf{x}) \} dS \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Il s'agit du théorème de représentation. Les intégrations sont effectuées sur la coordonnée  $\mathbf{x}$ .

## A.2 Perturbation du champ de déplacement dans le cadre de l'approximation de Born

Dans le cadre de l'approximation de Born, on considère que

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}^0 + \delta \mathbf{c} \quad (\text{A.11})$$

A l'ordre 1, le champ perturbé  $\mathbf{u}$  vérifie donc l'équation

$$\rho\omega^2 u_i + \partial_j c_{ijkl}^0 \partial_k u_l = -(f_i + \delta f_i) \quad (\text{A.12})$$

avec  $\delta f_i = \partial_j (\delta c_{ijkl} \partial_k u_l^0)$ . On applique alors le théorème de représentation au champ perturbé :

$$\begin{aligned} u_n(\mathbf{r}) = & \int G_{ni}(\mathbf{r}, \mathbf{x}) f_i(\mathbf{x}) dV \\ & + \int G_{ni}(\mathbf{r}, \mathbf{x}) \delta f_i(\mathbf{x}) dV \\ & + \oint \left\{ G_{ni}(\mathbf{r}, \mathbf{x}) n_j c_{ijkl}^0 \partial_k u_l(\mathbf{x}) \right\} dS \\ & - \oint \left\{ -u_i(\mathbf{x}) n_j c_{ijkl}^0 \partial_k G_{ln}(\mathbf{r}, \mathbf{x}) \right\} dS \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Le tenseur de Green est défini dans le milieu de référence. Dans ce milieu de référence, la traction est nulle sur la surface  $S$  :  $n_j c_{ijkl}^0 \partial_k G_{ln} = 0$ . Ainsi, le dernier terme de (A.13) est nul. Le champ non-perturbé s'écrit alors :

$$u_n^0(\mathbf{r}) = \int G_{ni}(\mathbf{r}, \mathbf{x}) f_i(\mathbf{x}) dV \quad (\text{A.14})$$

Si la traction est nulle sur  $S$  pour le milieu perturbé, alors  $n_j (c_{ijkl}^0 + \delta c_{ijkl}) \partial_k u_l = 0$ . Donc  $n_j c_{ijkl}^0 \partial_k u_l = -n_j \delta c_{ijkl} \partial_k u_l$  et l'expression du champ perturbé devient :

$$\begin{aligned} u_n(\mathbf{r}) = & u_n^0(\mathbf{r}) + \int G_{ni}(\mathbf{r}, \mathbf{x}) \partial_k (\delta c_{iklj} \partial_l u_j(\mathbf{x})) dV \\ & - \oint G_{ni}(\mathbf{r}, \mathbf{x}) n_j \delta c_{ijkl} \partial_k u_l(\mathbf{x}) dS \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Pour l'intégrale sur le volume, on effectue une intégration par partie puis on applique le théorème de Gauss :

$$\begin{aligned} & \int G_{ni}(\mathbf{r}, \mathbf{x}) \partial_k (\delta c_{iklj} \partial_l u_j(\mathbf{x})) dV \\ = & \int \partial_k (G_{ni}(\mathbf{r}, \mathbf{x}) \delta c_{iklj} \partial_l u_j(\mathbf{x})) dV \\ & - \int \partial_k (G_{ni}(\mathbf{r}, \mathbf{x})) \delta c_{iklj} \partial_l u_j(\mathbf{x}) dV \\ = & \oint G_{ni}(\mathbf{r}, \mathbf{x}) n_k \delta c_{iklj} \partial_l u_j(\mathbf{x}) dS \\ & - \int \partial_k (G_{ni}(\mathbf{r}, \mathbf{x})) \delta c_{iklj} \partial_l u_j(\mathbf{x}) dV \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Finalement, le champ perturbé s'écrit :

$$u_n(\mathbf{r}) = u_n^0(\mathbf{r}) - \int \partial_k (G_{ni}(\mathbf{r}, \mathbf{x})) \delta c_{iklj} \partial_l u_j(\mathbf{x}) dV \quad (\text{A.17})$$

Il s'agit de l'expression de Lippman-Schwinger. On obtient la perturbation du champ  $\delta u_n(\mathbf{r})$  dans l'approximation de Born, en ne conservant que les termes à l'ordre 1.

$$\delta u_n(\mathbf{r}) = u_n(\mathbf{r}) - u_n^0(\mathbf{r}) = - \int \partial_k (G_{ni}(\mathbf{r}, \mathbf{x})) \delta c_{iklj} \partial_l u_j^0(\mathbf{x}) dV \quad (\text{A.18})$$

# Annexe B

## Coefficients de diffusion par une hétérogénéité isotrope et transverse isotrope

Dans le chapitre 2, nous avons vu le couplage entre une onde P incidente et une onde P diffusée par une hétérogénéité isotrope et transverse isotrope. Nous développerons dans cette annexe l'expression des coefficients de Rayleigh pour les autres types de couplage. On a défini les coefficients de Rayleigh d'après Dahlen et al. (2000)

$$\Omega_m = -\frac{1}{2} (\hat{\mathbf{p}}'' \cdot \tilde{\mathbf{S}}^m \cdot \hat{\mathbf{p}}') \quad (\text{B.1})$$

où  $\hat{\mathbf{p}}'$  est le vecteur unitaire de polarisation de l'onde incidente et  $\hat{\mathbf{p}}''$  celui de l'onde diffusée.

### B.1 Coefficients de Rayleigh pour des perturbations isotropes

On examine le couplage induit par des hétérogénéité de vitesse  $\delta\alpha$  et  $\delta\beta$ , ainsi que pour des perturbations de densité  $\delta\rho$ .

#### B.1.1 Couplage P-S

$$\Omega_\alpha^{P \rightarrow S} = 0 \quad (\text{B.2})$$



$$\Omega_{\beta}^{P \rightarrow S} = 2 \left( \frac{\beta}{\alpha} \right) (\hat{\mathbf{k}}'' \cdot \hat{\mathbf{k}}') (\hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{p}}'') \quad (\text{B.3})$$

$$\Omega_{\rho}^{P \rightarrow S} = -\frac{1}{2} (\hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{p}}'') + \left( \frac{\beta}{\alpha} \right) (\hat{\mathbf{k}}'' \cdot \hat{\mathbf{k}}') (\hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{p}}'') \quad (\text{B.4})$$

L'allure des diagrammes de radiation dépend du type d'onde S (SV ou SH) incidente et diffusée. Il n'y a pas de diffusion de l'énergie dans la direction incidente quelle que soit le type de perturbations.

### B.1.2 Couplage S-P

$$\Omega_{\alpha}^{S \rightarrow P} = 0 \quad (\text{B.5})$$

$$\Omega_{\beta}^{S \rightarrow P} = 2 \left( \frac{\beta}{\alpha} \right) (\hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{k}}'') (\hat{\mathbf{k}}'' \cdot \hat{\mathbf{p}}') \quad (\text{B.6})$$

$$\Omega_{\rho}^{S \rightarrow P} = -\frac{1}{2} (\hat{\mathbf{k}}'' \cdot \hat{\mathbf{p}}') + \left( \frac{\beta}{\alpha} \right) (\hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{k}}'') (\hat{\mathbf{k}}'' \cdot \hat{\mathbf{p}}') \quad (\text{B.7})$$

Il n'y a pas de diffusion de l'énergie dans la direction incidente quelle que soit le type de perturbations.

### B.1.3 Couplage S-S

$$\Omega_{\alpha}^{S \rightarrow S} = 0 \quad (\text{B.8})$$

$$\Omega_{\beta}^{S \rightarrow S} = (\hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{k}}'') (\hat{\mathbf{p}}' \cdot \hat{\mathbf{p}}'') + (\hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{p}}'') (\hat{\mathbf{p}}' \cdot \hat{\mathbf{k}}'') \quad (\text{B.9})$$

$$\Omega_{\rho}^{S \rightarrow S} = \frac{1}{2} \left[ -\hat{\mathbf{p}}' \cdot \hat{\mathbf{p}}'' + (\hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{p}}'') (\hat{\mathbf{p}}' \cdot \hat{\mathbf{k}}'') + (\hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{k}}'') (\hat{\mathbf{p}}' \cdot \hat{\mathbf{p}}'') \right] \quad (\text{B.10})$$

Il n'y a pas de diffusion de l'énergie dans la direction incidente pour une perturbation  $\delta\rho$  quel que soit le type d'interaction S-S. Pour une perturbation  $\delta\beta$ , seules les interactions SV-SV et SH-SH diffusent dans la direction incidente.

Les figures B.1 et B.2 représentent les diagrammes de diffusion correspondant aux perturbations  $\delta\beta$  et  $\delta\rho$  pour les différents types d'interaction.

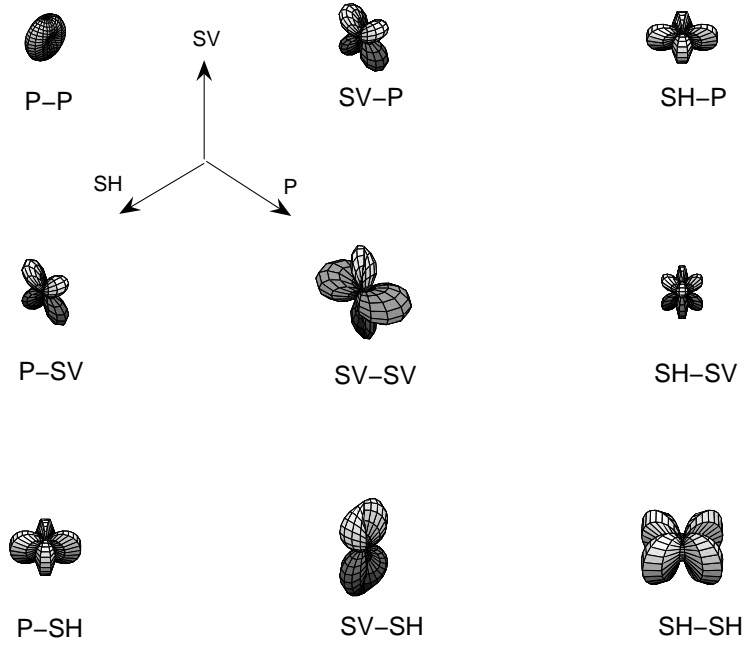


FIG. B.1 – Diagrammes de radiation pour la perturbation  $\delta\beta$  pour les différents types d'interaction. On a représenté la valeur absolue des coefficients de diffusion pour les valeurs moyennes de  $\alpha$  et  $\beta$  dans la graine. Les amplitudes relatives des diagrammes ne sont pas respectées.

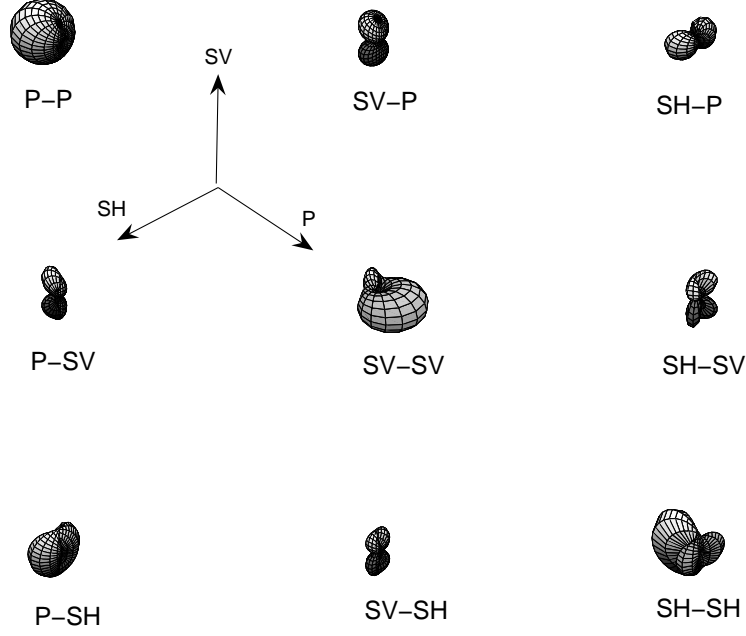


FIG. B.2 – Diagrammes de radiation pour la perturbation  $\delta\rho$  pour les différents types d'interaction. On a représenté la valeur absolue des coefficients de diffusion pour les valeurs moyennes de  $\alpha$  et  $\beta$  dans la graine. Les amplitudes relatives des diagrammes ne sont pas respectées.

## B.2 Coefficients de Rayleigh pour des perturbations transverses isotropes

On examinera le couplage induit par les perturbations anisotrope  $\epsilon$ ,  $\delta$  et  $\gamma$ . Ce couplage est fonction de la direction de propagation par rapport à l'axe de symétrie.

### B.2.1 Couplage P-S

$$\Omega_{\epsilon}^{P \rightarrow S} = \left( \frac{\alpha}{\beta} \right) (\hat{\mathbf{k}}'' \cdot \hat{\mathbf{s}}) (\hat{\mathbf{p}}'' \cdot \hat{\mathbf{s}}) [(\hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{s}})^2 - 1] \quad (\text{B.11})$$

$$\Omega_{\delta}^{P \rightarrow S} = - \left( \frac{\alpha}{\beta} \right) (\hat{\mathbf{k}}'' \cdot \hat{\mathbf{s}})(\hat{\mathbf{p}}'' \cdot \hat{\mathbf{s}}) [(\hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{s}})^2 - 1/2] \quad (\text{B.12})$$

$$\begin{aligned} \Omega_{\gamma}^{P \rightarrow S} = & \left( \frac{\beta}{\alpha} \right) \{ 2(\hat{\mathbf{k}}'' \cdot \hat{\mathbf{s}})(\hat{\mathbf{p}}'' \cdot \hat{\mathbf{s}}) \\ & - 2(\hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{s}})(\hat{\mathbf{p}}'' \cdot \hat{\mathbf{s}})(\hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{k}}'') \\ & - 2(\hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{s}})(\hat{\mathbf{k}}'' \cdot \hat{\mathbf{s}})(\hat{\mathbf{p}}'' \cdot \hat{\mathbf{k}}') \} \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

### B.2.2 Couplage S-P

$$\Omega_{\epsilon}^{S \rightarrow P} = \left( \frac{\alpha}{\beta} \right) (\hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{s}})(\hat{\mathbf{p}}' \cdot \hat{\mathbf{s}}) [(\hat{\mathbf{k}}'' \cdot \hat{\mathbf{s}})^2 - 1] \quad (\text{B.14})$$

$$\Omega_{\delta}^{S \rightarrow P} = - \left( \frac{\alpha}{\beta} \right) (\hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{s}})(\hat{\mathbf{p}}' \cdot \hat{\mathbf{s}}) [(\hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{s}})^2 - 1/2] \quad (\text{B.15})$$

$$\begin{aligned} \Omega_{\gamma}^{S \rightarrow P} = & \left( \frac{\beta}{\alpha} \right) \{ 2(\hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{s}})(\hat{\mathbf{p}}' \cdot \hat{\mathbf{s}}) \\ & - 2(\hat{\mathbf{k}}'' \cdot \hat{\mathbf{s}})(\hat{\mathbf{p}}' \cdot \hat{\mathbf{s}})(\hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{k}}'') \\ & - 2(\hat{\mathbf{k}}'' \cdot \hat{\mathbf{s}})(\hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{s}})(\hat{\mathbf{p}}' \cdot \hat{\mathbf{k}}'') \} \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

### B.2.3 Couplage S-S

$$\Omega_{\epsilon}^{S \rightarrow S} = \left( \frac{\alpha}{\beta} \right)^2 (\hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{s}})(\hat{\mathbf{k}}'' \cdot \hat{\mathbf{s}})(\hat{\mathbf{p}}' \cdot \hat{\mathbf{s}})(\hat{\mathbf{p}}'' \cdot \hat{\mathbf{s}}) \quad (\text{B.17})$$

$$\Omega_{\delta}^{S \rightarrow S} = - \left( \frac{\alpha}{\beta} \right)^2 (\hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{s}})(\hat{\mathbf{k}}'' \cdot \hat{\mathbf{s}})(\hat{\mathbf{p}}' \cdot \hat{\mathbf{s}})(\hat{\mathbf{p}}'' \cdot \hat{\mathbf{s}}) \quad (\text{B.18})$$

$$\begin{aligned} \Omega_{\gamma}^{S \rightarrow S} = & - (\hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{s}})(\hat{\mathbf{p}}'' \cdot \hat{\mathbf{s}})(\hat{\mathbf{k}}'' \cdot \hat{\mathbf{p}}') - (\hat{\mathbf{k}}'' \cdot \hat{\mathbf{s}})(\hat{\mathbf{p}}' \cdot \hat{\mathbf{s}})(\hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{p}}'') \\ & - (\hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{s}})(\hat{\mathbf{k}}'' \cdot \hat{\mathbf{s}})(\hat{\mathbf{p}}'' \cdot \hat{\mathbf{p}}') - (\hat{\mathbf{p}}' \cdot \hat{\mathbf{s}})(\hat{\mathbf{p}}'' \cdot \hat{\mathbf{s}})(\hat{\mathbf{k}}'' \cdot \hat{\mathbf{k}}') \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$



# Annexe C

## Noyaux d'amplitude des PKP(DF)

Les noyaux de sensibilité sont associés à une observable sismique et à une perturbation donnée du modèle. Dans cette thèse, nous avons principalement développé les noyaux de sensibilité pour le temps de propagation absolu et différentiel. Il existe d'autres études développant la théorie des noyaux de sensibilité pour l'amplitude des ondes (Dahlen et Baig, 2002), ou pour une observable appelée "splitting intensity" (Favier et al., 2004).

### C.1 Définition de l'amplitude

L'amplitude des ondes de volume est sensible aux variations tridimensionnelles de la vitesse des ondes sismiques, responsables par exemple des effets de "focusing" et "defocusing" des ondes.

On compare le champ de déplacement observé  $u_{obs}$  à un synthétique  $u^0$  calculé dans un modèle de référence. On définit de la façon suivante l'amplitude du signal observé et du signal de référence :

$$A_0 = \sqrt{\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} u^0(t)^2 dt} \quad (C.1)$$

$$A_{obs} = \sqrt{\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} u_{obs}(t)^2 dt} \quad (C.2)$$

On définit alors l'observable sismique mesurant la perturbation de l'amplitude :

$$\delta(\ln A) = \frac{A_{obs} - A_0}{A_0} \quad (C.3)$$

## C.2 Expression de la perturbation de l'amplitude

Dans le cadre de l'approximation de Born, le signal observé est la somme du signal dans le milieu de référence et d'une perturbation  $\delta u$  associée à une perturbation du tenseur élastique. L'amplitude du signal observé s'écrit alors

$$A_{obs}^2 = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} (u^0(t) + \delta u)^2 dt \quad (C.4)$$

On néglige tous les termes d'ordre 2 :

$$A_{obs}^2 = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} (u^0(t))^2 dt + 2 \int_{t_1}^{t_2} (u^0(t) \delta u) dt \quad (C.5)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} A_{obs}^2 - A_0^2 &\sim 2A_0(A_{obs} - A_0) \\ &\sim \frac{2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} (u^0(t) \delta u) dt \end{aligned} \quad (C.6)$$

Donc

$$\delta(\ln A) = \frac{\int_{t_1}^{t_2} u^0(t) \delta u dt}{\int_{t_1}^{t_2} (u^0(t))^2 dt} \quad (C.7)$$

Dans le domaine fréquentiel, la perturbation de l'amplitude s'écrit alors :

$$\delta(\ln A) = \frac{\mathcal{Re} \int_0^{+\infty} u^0(\omega)^* \delta u(\omega) d\omega}{\int_0^{+\infty} |u^0(\omega)|^2 d\omega} \quad (C.8)$$

## C.3 Noyau de sensibilité pour l'amplitude

Si on introduit l'expression de la perturbation du champ de déplacement et celle du champ de déplacement de référence dans l'expression (C.8), on obtient :

$$\begin{aligned} K_m^A = & -\frac{1}{2\pi} N \Omega_m \left( \frac{1}{c' c''} \right)^{1/2} \left( \frac{\mathcal{R}}{c_R \mathcal{R}' \mathcal{R}''} \right) \\ & \times \frac{\int_0^\infty \omega^2 |\dot{s}(\omega)|^2 \cos[\omega(T' + T'' - T) - (M' + M'' - M)\pi/2] d\omega}{\int_0^\infty |\dot{s}(\omega)|^2 d\omega} \end{aligned} \quad (C.9)$$

Pour les noyaux de sensibilité des ondes PKP(DF) dans la graine  $M' + M'' - M = 0$ . Il existe alors une solution analytique à l'intégrale sur les fréquences

$$I = \frac{\int_0^\infty \omega^2 |\dot{s}(\omega)|^2 \cos[\omega(T' + T'' - T)] d\omega}{\int_0^\infty |\dot{s}(\omega)|^2 d\omega} \quad (C.10)$$

dans le cas où la fonction source est une dérivée  $n^{eme}$  de gaussienne :

$$|\dot{s}(\omega)|^2 = \frac{\omega^{2n} \tau_c^2}{4\pi} e^{-\omega^2 \tau_c^2 / 8\pi^2} \quad (C.11)$$

$\tau_c$  est la période caractéristique de l'onde que l'on peut associer à la période dominante ou visuelle  $T_d = \tau_c / \sqrt{2n}$ .

La solution analytique a l'expression suivante (Gradshteyn et Ryzhik, 1965) :

$$I_n = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!!} \frac{2\pi^2}{2^n \tau_c^2} \exp\left(-\frac{2\pi^2(T' + T'' - T)^2}{\tau_c^2}\right) H_{2n+2}\left(\frac{\sqrt{2}\pi(T' + T'' - T)}{\tau_c}\right) \quad (C.12)$$

avec  $H_{2n+2}(x)$  le polynôme d'Hermite d'ordre  $2n+1$  et  $(2n+1)!!$  le produit factoriel des nombres impairs.

On pose  $\Delta T = T'' + T' - T$ . Nous examinerons trois cas :

– Cas du spectre gaussien ( $n=0$ )

$$I_0 = -\frac{2\pi^2}{\tau_c^2} \exp\left(-\frac{2\pi^2 \Delta T^2}{\tau_c^2}\right) \left(8\pi^2 \frac{\Delta T^2}{\tau_c^2} - 2\right) \quad (C.13)$$

– Cas du spectre dérivée première de gaussienne ( $n=1$ )

$$I_1 = \frac{\pi^2}{\tau_c^2} \exp\left(-\frac{2\pi^2 \Delta T^2}{\tau_c^2}\right) \left(64\pi^4 \frac{\Delta T^4}{\tau_c^4} - 96\pi^2 \frac{\Delta T^2}{\tau_c^2} + 12\right) \quad (C.14)$$

– Cas du spectre dérivée seconde de gaussienne ( $n=2$ )

$$I_2 = -\frac{1}{6} \frac{\pi^2}{\tau_c^2} \exp\left(-\frac{2\pi^2 \Delta T^2}{\tau_c^2}\right) \left(512\pi^6 \frac{\Delta T^6}{\tau_c^6} - 1920\pi^4 \frac{\Delta T^4}{\tau_c^4} + 1440\pi^2 \frac{\Delta T^2}{\tau_c^2} - 120\right) \quad (C.15)$$

La figure C.1 représente le noyau de sensibilité  $K_\alpha^A$  pour une onde PKP(DF) dans la graine, et pour une fonction source de type dérivée seconde de Gaussienne avec une période dominante de 2 s. L'amplitude des noyaux  $K_\alpha^A$  est supérieure à celle des noyaux  $K_\alpha^T$  d'un facteur environ 1/2 . Mais, contrairement aux noyaux de sensibilité pour le temps de propagation, l'amplitude est maximale (négative) sur le rai, en raison du terme en  $\cos[\omega(T'' + T' - T)]$  (figure C.2). Compte tenu de la distribution de la sensibilité au sein du volume de Fresnel, une anomalie de vitesse de grande longueur d'onde n'entraînera qu'une perturbation négligeable de l'amplitude. Par contre, l'onde sera plus sensible aux anomalies de petite taille.



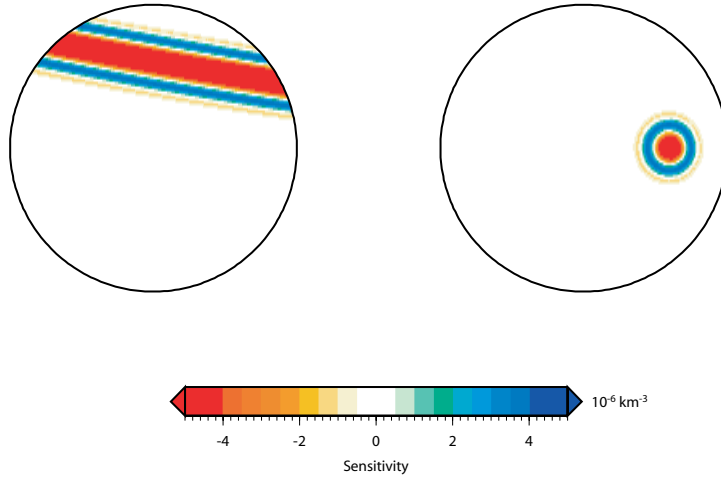


FIG. C.1 – Section dans le plan d’incidence et dans un plan transverse (au niveau du point-bas) du noyau d’amplitude  $K_{\alpha}^A$  pour une dérivée seconde de gaussienne de 2 s de période dominante et  $160^{\circ}$  de distance épacentrale.

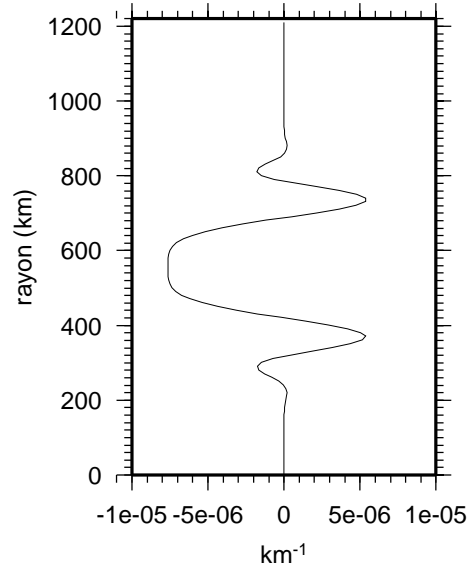


FIG. C.2 – Variation de l’amplitude du noyau  $K_{\alpha}^A$  dans la direction radiale passant par le point le plus bas du rai.

En milieu transverse anisotrope, pour une orientation donnée de l’axe de symétrie, on peut utiliser les coefficients de scattering définis au chapitre 2.

# Annexe D

## Intégration sur un contour complexe

### D.1 Points selles

La combinaison des fonctions d'onde horizontales et verticales dans le cadre de l'approximation WKBJ fait apparaître un facteur  $e^{i\omega J(p)}$  dans l'intégrale sur  $p$  :

$$\int f(p) e^{i\omega J(p)} \quad (\text{D.1})$$

avec  $J(p)$  le délai de phase ayant l'expression suivante

$$J(p) = \int_{r_b}^{r_S} \chi dr + \int_{r_b}^r \chi dr + p\Delta_{SR} \quad (\text{D.2})$$

$r_b$  est le rayon d'une interface. L'intégrant a donc des points selles pour les valeurs de  $p$  telles que  $\partial J/\partial p = 0$ . Les points selles vérifient donc  $\Delta(p) = \Delta_{SR}$ . Il y a autant de points selles que d'ondes susceptibles d'être enregistrées à la distance épacentrale  $\Delta_{SR}$ . Si on considère le cas des ondes P à la CMB, pour des distances épacentrales inférieures à celle correspondant à l'incidence rasante ( $\Delta_d$ ), il existe deux points selles, l'un pour l'onde P et l'autre pour l'onde PcP réfléchi à la CMB. Au-delà de cette distance épacentrale, seule l'onde diffractée est enregistrée.

### D.2 Points diffractants

Le paramètre de rai correspondant à l'incidence rasante est appelé paramètre critique. Les pôles de diffraction sont associés aux coefficients de réflexion-transmission et émergent à partir du paramètre critique sur l'axe réel. En effet, tous ces coefficients sont divisés par

le facteur D

$$D = b^2 \dot{\xi}_c + cb \dot{\xi}_m - d(a - d \dot{\xi}_c \dot{\eta}_m) \dot{\xi}_m p^2 / r_{CMB}^2 \quad (D.3)$$

L'indice  $m$  correspond à "mantle" et l'indice  $c$  à "core".  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  dépendent de la vitesse des ondes P et S de part et d'autre de la CMB, ainsi que des densités. Étant donné qu'aucune onde S ne se propage dans le noyau liquide, la fonction d'onde verticale associée à l'onde S dans le noyau liquide est nulle. On appelle pôle de diffraction les zéros de D. Cependant, ces pôles sont très proches des pôles des fonctions d'ondes verticales qui apparaissent dans l'expression de D. Les pôles de diffractions des ondes P dans le manteau émergent en  $r_{cmb}/\alpha_m$  sur l'axe des  $p$  réels avec une partie imaginaire positive tandis que les pôles de diffractions des ondes P dans le noyau émergent en  $r_{cmb}/\alpha_c$  avec une partie imaginaire négative et les pôles de diffractions des ondes S dans le manteau émergent en  $r_{cmb}/\beta_m$  avec une partie imaginaire positive (Aki et Richards, 1980).

### D.3 Contour d'intégration

On choisit le contour d'intégration  $\Gamma$  de façon à ce que l'intégrand décroisse exponentiellement, et pour cela ce contour doit passer par les points selles tout en respectant leur orientation. En effet, au voisinage de ces points selles  $p_0$ , on peut écrire la phase avec un développement en séries de Taylor

$$J(p) = T(p_0) + \frac{1}{2}(p - p_0)^2(-\partial\Delta/\partial p) \quad (D.4)$$

L'orientation du point selle dépend du signe de  $(-\partial\Delta/\partial p)$  qui pour une onde P directe se propageant dans le manteau est positif et pour l'onde PcP réfléchi à la CMB est négatif. Cependant, le trajet le plus raide peut être assez compliqué en présence d'une triplication. On préfère alors un contour plus simple constitué de segments rectilignes.

Sur l'axe réel, le segment doit couvrir les points selles correspondant à la gamme de distances épacentrales considérées. Cependant, ces valeurs ne permettent de déterminer de façon précise que des phases proches temporellement. Ainsi, le contour peut être déformé pour tenir compte des valeurs critiques (associées aux phases proches temporellement) de part et d'autre de la discontinuité.

# Annexe E

## Détails sur la matrice de couplage dans le cadre de l'approximation de Langer

Nous développons ici les expressions des termes de couplages pour les différentes combinaisons d'onde montante et d'onde descendante.

### E.1 Cas P - P

$$- C_{P_{sc}^\uparrow P_{in}^\downarrow}$$

$$\begin{aligned} \pi_{sc} &= \dot{\pi}_{sc} \\ \pi_{in} &= \dot{\pi}_{in} \\ \xi_{sc} &= \dot{\xi}_{sc} \\ \xi_{in} &= \dot{\xi}_{in} \\ n_1 &= (\alpha_X \dot{\xi}_{sc})(-\alpha_X \dot{\xi}_{in}) \\ n_2 &= (\alpha_X p_{sc}/r_X)(\alpha_X p_{in}/r_X) \\ n_3 &= \left[ (-i\omega \dot{\xi}_{sc})(\alpha_X \dot{\xi}_{sc}) + (-i\omega p_{sc}/r_X)(\alpha_X p_{sc}/r_X) \right] \\ &\quad \times \left[ (-i\omega \dot{\xi}_{in})(-\alpha_X \dot{\xi}_{in}) + (i\omega p_{in}/r_X)(\alpha_X p_{in}/r_X) \right] \\ n_4 &= (-i\omega \dot{\xi}_{sc})(\alpha_X \dot{\xi}_{sc})(-i\omega \dot{\xi}_{in})(-\alpha_X \dot{\xi}_{in}) \\ n_5 &= (-i\omega \dot{\xi}_{sc})(\alpha_X p_{sc}/r_X)(i\omega p_{in}/r_X)(-\alpha_X \dot{\xi}_{in}) \\ &\quad + (-i\omega p_{sc}/r_X)(\alpha_X \dot{\xi}_{sc})(-i\omega \dot{\xi}_{in})(\alpha_X p_{in}/r_X) \\ n_6 &= (-i\omega p_{sc}/r_X)(\alpha_X p_{sc}/r_X)(i\omega p_{in}/r_X)(\alpha_X p_{in}/r_X) \end{aligned} \tag{E.1}$$

$$- C_{P_{sc}^\downarrow P_{in}^\downarrow}$$

$$\begin{aligned}
\pi_{sc} &= \dot{\pi}_{sc} \\
\pi_{in} &= \dot{\pi}_{in} \\
\xi_{sc} &= \dot{\xi}_{sc} \\
\xi_{in} &= \dot{\xi}_{in} \\
n_1 &= (\alpha_X \dot{\xi}_{sc})(-\alpha_X \dot{\xi}_{in}) \\
n_2 &= (-\alpha_X p_{sc}/r_X)(\alpha_X p_{in}/r_X) \\
n_3 &= \left[ (i\omega \dot{\xi}_{sc})(\alpha_X \dot{\xi}_{sc}) + (-i\omega p_{sc}/r_X)(-\alpha_X p_{sc}/r_X) \right] \\
&\quad \times \left[ (-i\omega \dot{\xi}_{in})(-\alpha_X \dot{\xi}_{in}) + (i\omega p_{in}/r_X)(\alpha_X p_{in}/r_X) \right] \\
n_4 &= (i\omega \dot{\xi}_{sc})(\alpha_X \dot{\xi}_{sc})(-i\omega \dot{\xi}_{in})(-\alpha_X \dot{\xi}_{in}) \\
n_5 &= (i\omega \dot{\xi}_{sc})(-\alpha_X p_{sc}/r_X)(i\omega p_{in}/r_X)(-\alpha_X \dot{\xi}_{in}) \\
&\quad + (-i\omega p_{sc}/r_X)(\alpha_X \dot{\xi}_{sc})(-i\omega \dot{\xi}_{in})(\alpha_X p_{in}/r_X) \\
n_6 &= (-i\omega p_{sc}/r_X)(-\alpha_X p_{sc}/r_X)(i\omega p_{in}/r_X)(\alpha_X p_{in}/r_X)
\end{aligned} \tag{E.2}$$

$$- C_{P_{sc}^\downarrow P_{in}^\uparrow}$$

$$\begin{aligned}
\pi_{sc} &= \dot{\pi}_{sc} \\
\pi_{in} &= \dot{\pi}_{in} \\
\xi_{sc} &= \dot{\xi}_{sc} \\
\xi_{in} &= \dot{\xi}_{in} \\
n_1 &= (\alpha_X \dot{\xi}_{sc})(\alpha_X \dot{\xi}_{in}) \\
n_2 &= (-\alpha_X p_{sc}/r_X)(\alpha_X p_{in}/r_X) \\
n_3 &= \left[ (i\omega \dot{\xi}_{sc})(\alpha_X \dot{\xi}_{sc}) + (-i\omega p_{sc}/r_X)(-\alpha_X p_{sc}/r_X) \right] \\
&\quad \times \left[ (i\omega \dot{\xi}_{in})(\alpha_X \dot{\xi}_{in}) + (i\omega p_{in}/r_X)(\alpha_X p_{in}/r_X) \right] \\
n_4 &= (i\omega \dot{\xi}_{sc})(\alpha_X \dot{\xi}_{sc})(i\omega \dot{\xi}_{in})(\alpha_X \dot{\xi}_{in}) \\
n_5 &= (i\omega \dot{\xi}_{sc})(-\alpha_X p_{sc}/r_X)(i\omega p_{in}/r_X)(\alpha_X \dot{\xi}_{in}) \\
&\quad + (-i\omega p_{sc}/r_X)(\alpha_X \dot{\xi}_{sc})(i\omega \dot{\xi}_{in})(\alpha_X p_{in}/r_X) \\
n_6 &= (-i\omega p_{sc}/r_X)(-\alpha_X p_{sc}/r_X)(i\omega p_{in}/r_X)(\alpha_X p_{in}/r_X)
\end{aligned} \tag{E.3}$$

$$- C_{P_{sc}^\uparrow P_{in}^\uparrow}$$

$$\begin{aligned}
\pi_{sc} &= \dot{\pi}_{sc} \\
\pi_{in} &= \dot{\pi}_{in}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\xi_{sc} &= \dot{\xi}_{sc} \\
\xi_{in} &= \dot{\xi}_{in} \\
n_1 &= (\alpha_X \dot{\xi}_{sc})(\alpha_X \dot{\xi}_{in}) \\
n_2 &= (\alpha_X p_{sc}/r_X)(\alpha_X p_{in}/r_X) \\
n_3 &= \left[ (-i\omega \dot{\xi}_{sc})(\alpha_X \dot{\xi}_{sc}) + (-i\omega p_{sc}/r_X)(\alpha_X p_{sc}/r_X) \right] \\
&\quad \times \left[ (i\omega \dot{\xi}_{in})(\alpha_X \dot{\xi}_{in}) + (i\omega p_{in}/r_X)(\alpha_X p_{in}/r_X) \right] \\
n_4 &= (-i\omega \dot{\xi}_{sc})(\alpha_X \dot{\xi}_{sc})(i\omega \dot{\xi}_{in})(\alpha_X \dot{\xi}_{in}) \\
n_5 &= (-i\omega \dot{\xi}_{sc})(\alpha_X p_{sc}/r_X)(i\omega p_{in}/r_X)(\alpha_X \dot{\xi}_{in}) \\
&\quad + (-i\omega p_{sc}/r_X)(\alpha_X \dot{\xi}_{sc})(i\omega \dot{\xi}_{in})(\alpha_X p_{in}/r_X) \\
n_6 &= (-i\omega p_{sc}/r_X)(\alpha_X p_{sc}/r_X)(i\omega p_{in}/r_X)(\alpha_X p_{in}/r_X)
\end{aligned} \tag{E.4}$$

## E.2 Cas P - SV

$$-C_{SV_{sc}^\dagger P_{in}^\dagger}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{sc} &= \dot{\sigma}_{sc} \\
\pi_{in} &= \dot{\pi}_{in} \\
\eta_{sc} &= \dot{\eta}_{sc} \\
\xi_{in} &= \dot{\xi}_{in} \\
n_1 &= (\beta_X p_{sc}/r_X)(-\alpha_X \dot{\xi}_{in}) \\
n_2 &= (-\beta_X \dot{\eta}_{sc})(\alpha_X p_{in}/r_X) \\
n_3 &= (-i\omega \dot{\eta}_{sc})(\beta_X p_{sc}/r_X)(-i\omega \dot{\xi}_{in})(-\alpha_X \dot{\xi}_{in}) \\
n_4 &= \left[ (-i\omega \dot{\eta}_{sc})(-\beta_X \dot{\eta}_{sc}) + (-i\omega p_{sc}/r_X)(\alpha_X p_{sc}/r_X) \right] \\
&\quad \times \left[ (-i\omega \dot{\xi}_{in})(\alpha_X p_{in}/r_X) + (i\omega p_{in}/r_X)(-\alpha_X \dot{\xi}_{in}) \right] \\
n_5 &= (-i\omega p_{sc}/r_X)(-\beta_X \dot{\eta}_{sc})(i\omega p_{in}/r_X)(\alpha_X p_{in}/r_X)
\end{aligned} \tag{E.5}$$

$$-C_{SV_{sc}^\dagger P_{in}^\dagger}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{sc} &= \dot{\sigma}_{sc} \\
\pi_{in} &= \dot{\pi}_{in} \\
\eta_{sc} &= \dot{\eta}_{sc} \\
\xi_{in} &= \dot{\xi}_{in} \\
n_1 &= (-\beta_X p_{sc}/r_X)(-\alpha_X \dot{\xi}_{in})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n_2 &= (-\beta_X \dot{\eta}_{sc})(\alpha_X p_{in}/r_X) \\
n_3 &= (i\omega \dot{\eta}_{sc})(-\beta_X p_{sc}/r_X)(-i\omega \dot{\xi}_{in})(-\alpha_X \dot{\xi}_{in}) \\
n_4 &= [(i\omega \dot{\eta}_{sc})(-\beta_X \dot{\eta}_{sc}) + (-i\omega p_{sc}/r_X)(-\alpha_X p_{sc}/r_X)] \\
&\quad \times [(-i\omega \dot{\xi}_{in})(\alpha_X p_{in}/r_X) + (i\omega p_{in}/r_X)(-\alpha_X \dot{\xi}_{in})] \\
n_5 &= (-i\omega p_{sc}/r_X)(-\beta_X \dot{\eta}_{sc})(i\omega p_{in}/r_X)(\alpha_X p_{in}/r_X)
\end{aligned} \tag{E.6}$$

$-C_{SV_{sc}^\dagger P_{in}^\dagger}$

$$\begin{aligned}
\sigma_{sc} &= \dot{\sigma}_{sc} \\
\pi_{in} &= \dot{\pi}_{in} \\
\eta_{sc} &= \dot{\eta}_{sc} \\
\xi_{in} &= \dot{\xi}_{in} \\
n_1 &= (-\beta_X p_{sc}/r_X)(\alpha_X \dot{\xi}_{in}) \\
n_2 &= (-\beta_X \dot{\eta}_{sc})(\alpha_X p_{in}/r_X) \\
n_3 &= (i\omega \dot{\eta}_{sc})(-\beta_X p_{sc}/r_X)(i\omega \dot{\xi}_{in})(\alpha_X \dot{\xi}_{in}) \\
n_4 &= [(i\omega \dot{\eta}_{sc})(-\beta_X \dot{\eta}_{sc}) + (-i\omega p_{sc}/r_X)(-\alpha_X p_{sc}/r_X)] \\
&\quad \times [(i\omega \dot{\xi}_{in})(\alpha_X p_{in}/r_X) + (i\omega p_{in}/r_X)(\alpha_X \dot{\xi}_{in})] \\
n_5 &= (-i\omega p_{sc}/r_X)(-\beta_X \dot{\eta}_{sc})(i\omega p_{in}/r_X)(\alpha_X p_{in}/r_X)
\end{aligned} \tag{E.7}$$

$-C_{SV_{sc}^\dagger P_{in}^\dagger}$

$$\begin{aligned}
\sigma_{sc} &= \dot{\sigma}_{sc} \\
\pi_{in} &= \dot{\pi}_{in} \\
\eta_{sc} &= \dot{\eta}_{sc} \\
\xi_{in} &= \dot{\xi}_{in} \\
n_1 &= (\beta_X p_{sc}/r_X)(\alpha_X \dot{\xi}_{in}) \\
n_2 &= (-\beta_X \dot{\eta}_{sc})(\alpha_X p_{in}/r_X) \\
n_3 &= (i\omega \dot{\eta}_{sc})(\beta_X p_{sc}/r_X)(i\omega \dot{\xi}_{in})(\alpha_X \dot{\xi}_{in}) \\
n_4 &= [(-i\omega \dot{\eta}_{sc})(-\beta_X \dot{\eta}_{sc}) + (-i\omega p_{sc}/r_X)(\alpha_X p_{sc}/r_X)] \\
&\quad \times [(i\omega \dot{\xi}_{in})(\alpha_X p_{in}/r_X) + (i\omega p_{in}/r_X)(\alpha_X \dot{\xi}_{in})] \\
n_5 &= (-i\omega p_{sc}/r_X)(-\beta_X \dot{\eta}_{sc})(i\omega p_{in}/r_X)(\alpha_X p_{in}/r_X)
\end{aligned} \tag{E.8}$$

### E.3 Cas SV - P

$$-C_{P_{sc}^\uparrow SV_{in}^\downarrow}$$

$$\begin{aligned}
\pi_{sc} &= \dot{\pi}_{sc} \\
\sigma_{in} &= \dot{\sigma}_{in} \\
\xi_{sc} &= \dot{\xi}_{sc} \\
\eta_{in} &= \dot{\eta}_{in} \\
n_1 &= (\alpha_X \dot{\xi}_{sc})(\beta_X p_{in}/r_X) \\
n_2 &= (\alpha_X p_{sc}/r_X)(\beta_X \dot{\eta}_{in}) \\
n_3 &= (-i\omega \dot{\xi}_{sc})(\alpha_X \dot{\xi}_{sc})(-i\omega \dot{\eta}_{in})(\beta_X p_{in}/r_X) \\
n_4 &= \left[ (-i\omega \dot{\xi}_{sc})(\alpha_X p_{sc}/r_X) + ((-i\omega p_{sc}/r_X)(\alpha_X \dot{\xi}_{sc})) \right. \\
&\quad \left. [(i\omega p_{in}/r_X)(\beta_X p_{in}/r_X)(-i\omega \dot{\eta}_{in})(\beta_X \dot{\eta}_{in})] \right] \\
n_5 &= (-i\omega p_{sc}/r_X)(\alpha p_{sc}/r_X)(i\omega p_{in}/r_X)(\beta_X \dot{\eta}_{in})
\end{aligned} \tag{E.9}$$

$$-C_{P_{sc}^\downarrow SV_{in}^\downarrow}$$

$$\begin{aligned}
\pi_{sc} &= \dot{\pi}_{sc} \\
\sigma_{in} &= \dot{\sigma}_{in} \\
\xi_{sc} &= \dot{\xi}_{sc} \\
\eta_{in} &= \dot{\eta}_{in} \\
n_1 &= (\alpha_X \dot{\xi}_{sc})(\beta_X p_{in}/r_X) \\
n_2 &= (-\alpha_X p_{sc}/r_X)(\beta_X \dot{\eta}_{in}) \\
n_3 &= (i\omega \dot{\xi}_{sc})(\alpha_X \dot{\xi}_{sc})(-i\omega \dot{\eta}_{in})(\beta_X p_{in}/r_X) \\
n_4 &= \left[ (i\omega \dot{\xi}_{sc})(-\alpha_X p_{sc}/r_X) + ((-i\omega p_{sc}/r_X)(\alpha_X \dot{\xi}_{sc})) \right. \\
&\quad \left. [(i\omega p_{in}/r_X)(\beta_X p_{in}/r_X)(-i\omega \dot{\eta}_{in})(\beta_X \dot{\eta}_{in})] \right] \\
n_5 &= (-i\omega p_{sc}/r_X)(-\alpha p_{sc}/r_X)(i\omega p_{in}/r_X)(\beta_X \dot{\eta}_{in})
\end{aligned} \tag{E.10}$$

$$-C_{P_{sc}^\downarrow SV_{in}^\uparrow}$$

$$\begin{aligned}
\pi_{sc} &= \dot{\pi}_{sc} \\
\sigma_{in} &= \dot{\sigma}_{in} \\
\xi_{sc} &= \dot{\xi}_{sc} \\
\eta_{in} &= \dot{\eta}_{in}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
n_1 &= (\alpha_X \dot{\xi}_{sc})(\beta_X p_{in}/r_X) \\
n_2 &= (-\alpha_X p_{sc}/r_X)(-\beta_X \dot{\eta}_{in}) \\
n_3 &= (i\omega \dot{\xi}_{sc})(\alpha_X \dot{\xi}_{sc})(i\omega \dot{\eta}_{in})(\beta_X p_{in}/r_X) \\
n_4 &= [(i\omega \dot{\xi}_{sc})(-\alpha_X p_{sc}/r_X) + ((-i\omega p_{sc}/r_X)(\alpha_X \dot{\xi}_{sc})] \\
&\quad [(i\omega p_{in}/r_X)(\beta_X p_{in}/r_X)(i\omega \dot{\eta}_{in})(-\beta_X \dot{\eta}_{in})] \\
n_5 &= (-i\omega p_{sc}/r_X)(-\alpha_X p_{sc}/r_X)(i\omega p_{in}/r_X)(-\beta_X \dot{\eta}_{in})
\end{aligned} \tag{E.11}$$

$$-C_{P_{sc}^\uparrow SV_{in}^\uparrow}$$

$$\begin{aligned}
\pi_{sc} &= \dot{\pi}_{sc} \\
\sigma_{in} &= \dot{\sigma}_{in} \\
\xi_{sc} &= \dot{\xi}_{sc} \\
\eta_{in} &= \dot{\eta}_{in} \\
n_1 &= (\alpha_X \dot{\xi}_{sc})(\beta_X p_{in}/r_X) \\
n_2 &= (\alpha_X p_{sc}/r_X)(-\beta_X \dot{\eta}_{in}) \\
n_3 &= (-i\omega \dot{\xi}_{sc})(\alpha_X \dot{\xi}_{sc})(i\omega \dot{\eta}_{in})(\beta_X p_{in}/r_X) \\
n_4 &= [(-i\omega \dot{\xi}_{sc})(\alpha_X p_{sc}/r_X) + ((-i\omega p_{sc}/r_X)(\alpha_X \dot{\xi}_{sc})] \\
&\quad [(i\omega p_{in}/r_X)(\beta_X p_{in}/r_X)(i\omega \dot{\eta}_{in})(-\beta_X \dot{\eta}_{in})] \\
n_5 &= (-i\omega p_{sc}/r_X)(\alpha_X p_{sc}/r_X)(i\omega p_{in}/r_X)(-\beta_X \dot{\eta}_{in})
\end{aligned} \tag{E.12}$$

## E.4 Cas SV - SV

$$-C_{SV_{sc}^\uparrow SV_{in}^\downarrow}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{sc} &= \dot{\sigma}_{sc} \\
\sigma_{in} &= \dot{\sigma}_{in} \\
\eta_{sc} &= \dot{\eta}_{sc} \\
\eta_{in} &= \dot{\eta}_{in} \\
n_1 &= (\beta_X p_{sc}/r_X)(\beta_X p_{in}/r_X) \\
n_2 &= (-\beta_X \dot{\eta}_{sc})(\beta_X \dot{\eta}_{in}) \\
n_3 &= (-i\omega \dot{\eta}_{sc})(\beta_X p_{sc}/r_X)(-i\omega \dot{\eta}_{in})(\beta_X p_{in}/r_X) \\
n_4 &= [(-i\omega \dot{\eta}_{sc})(-\beta_X \dot{\eta}_{sc}) + (-i\omega p_{sc}/r_X)(\beta_X p_{sc}/r_X)] \\
&\quad \times [(i\omega p_{in}/r_X)(\beta_X p_{in}/r_X) + (-i\omega \dot{\eta}_{in})(\beta_X \dot{\eta}_{in})]
\end{aligned}$$

$$n_5 = (-i\omega p_{sc}/r_X)(-\beta\dot{\eta}_{sc})(i\omega p_{in}/r_X)(\beta_X\dot{\eta}_{in}) \quad (\text{E.13})$$

$$-C_{SV_{sc}^\downarrow SV_{in}^\downarrow}$$

$$\sigma_{sc} = \dot{\sigma}_{sc}$$

$$\sigma_{in} = \dot{\sigma}_{in}$$

$$\eta_{sc} = \dot{\eta}_{sc}$$

$$\eta_{in} = \dot{\eta}_{in}$$

$$n_1 = (-\beta_X p_{sc}/r_X)(\beta_X p_{in}/r_X)$$

$$n_2 = (-\beta_X \dot{\eta}_{sc})(\beta_X \dot{\eta}_{in})$$

$$n_3 = (i\omega \dot{\eta}_{sc})(-\beta_X p_{sc}/r_X)(-i\omega \dot{\eta}_{in})(\beta_X p_{in}/r_X)$$

$$n_4 = [(i\omega \dot{\eta}_{sc})(-\beta_X \dot{\eta}_{sc}) + (-i\omega p_{sc}/r_X)(-\beta_X p_{sc}/r_X)] \\ \times [(i\omega p_{in}/r_X)(\beta_X p_{in}/r_X) + (-i\omega \dot{\eta}_{in})(\beta_X \dot{\eta}_{in})]$$

$$n_5 = (-i\omega p_{sc}/r_X)(-\beta \dot{\eta}_{sc})(i\omega p_{in}/r_X)(\beta_X \dot{\eta}_{in}) \quad (\text{E.14})$$

$$-C_{SV_{sc}^\downarrow SV_{in}^\uparrow}$$

$$\sigma_{sc} = \dot{\sigma}_{sc}$$

$$\sigma_{in} = \dot{\sigma}_{in}$$

$$\eta_{sc} = \dot{\eta}_{sc}$$

$$\eta_{in} = \dot{\eta}_{in}$$

$$n_1 = (-\beta_X p_{sc}/r_X)(\beta_X p_{in}/r_X)$$

$$n_2 = (-\beta_X \dot{\eta}_{sc})(-\beta_X \dot{\eta}_{in})$$

$$n_3 = (i\omega \dot{\eta}_{sc})(-\beta_X p_{sc}/r_X)(i\omega \dot{\eta}_{in})(\beta_X p_{in}/r_X)$$

$$n_4 = [(i\omega \dot{\eta}_{sc})(-\beta_X \dot{\eta}_{sc}) + (-i\omega p_{sc}/r_X)(-\beta_X p_{sc}/r_X)] \\ \times [(i\omega p_{in}/r_X)(\beta_X p_{in}/r_X) + (i\omega \dot{\eta}_{in})(-\beta_X \dot{\eta}_{in})]$$

$$n_5 = (-i\omega p_{sc}/r_X)(-\beta \dot{\eta}_{sc})(i\omega p_{in}/r_X)(-\beta_X \dot{\eta}_{in}) \quad (\text{E.15})$$

$$-C_{SV_{sc}^\uparrow SV_{in}^\uparrow}$$

$$\sigma_{sc} = \dot{\sigma}_{sc}$$

$$\sigma_{in} = \dot{\sigma}_{in}$$

$$\eta_{sc} = \dot{\eta}_{sc}$$

$$\eta_{in} = \dot{\eta}_{in}$$

$$\begin{aligned}
n_1 &= (\beta_X p_{sc}/r_X)(\beta_X p_{in}/r_X) \\
n_2 &= (-\beta_X \dot{\eta}_{sc})(-\beta_X \dot{\eta}_{in}) \\
n_3 &= (-i\omega \dot{\eta}_{sc})(\beta_X p_{sc}/r_X)(i\omega \dot{\eta}_{in})(\beta_X p_{in}/r_X) \\
n_4 &= [(-i\omega \dot{\eta}_{sc})(-\beta_X \dot{\eta}_{sc}) + (-i\omega p_{sc}/r_X)(\beta_X p_{sc}/r_X)] \\
&\quad \times [(i\omega p_{in}/r_X)(\beta_X p_{in}/r_X) + (i\omega \dot{\eta}_{in})(-\beta_X \dot{\eta}_{in})] \\
n_5 &= (-i\omega p_{sc}/r_X)(-\beta_X \dot{\eta}_{sc})(i\omega p_{in}/r_X)(-\beta_X \dot{\eta}_{in})
\end{aligned} \tag{E.16}$$

## E.5 Relation avec les coefficients de Rayleigh

On peut montrer que les termes de couplage contiennent les coefficients de Rayleigh. Dans le cas  $P_{sc}^\uparrow P_{in}^\downarrow$ , l'onde P diffusée est montante et l'onde incidente est descendante si bien que dans le repère  $(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{y})$  :

$$\mathbf{k}_{in} = \begin{pmatrix} -\dot{\xi}_{in} \\ (p_{in}/r_X) \cos(\phi_1) \\ (p_{in}/r_X) \sin(\phi_1) \end{pmatrix} \tag{E.17}$$

$$\mathbf{k}_{sc} = \begin{pmatrix} \dot{\xi}_{sc} \\ (p_{sc}/r_X) \cos(\phi_2) \\ (p_{sc}/r_X) \sin(\phi_2) \end{pmatrix} \tag{E.18}$$

En introduisant les composantes des vecteurs d'onde dans l'expression des termes de couplage, on peut montrer que :

$$\begin{aligned}
C_{P_{sc}^\uparrow P_{in}^\downarrow} &\propto -2\rho\omega^2 \frac{\delta\rho}{\rho} \left\{ (1/2) [1 - \hat{\mathbf{k}}_{sc} \cdot \hat{\mathbf{k}}_{in}] + (\beta^2/\alpha^2) [(\hat{\mathbf{k}}_{sc} \cdot \hat{\mathbf{k}}_{in})^2 - 1] \right\} \\
&\quad - 2\rho\omega^2 \frac{\delta\alpha}{\alpha} \\
&\quad - 2\rho\omega^2 \frac{\delta\beta}{\beta} \left\{ 2(\beta^2/\alpha^2) [1 - (\hat{\mathbf{k}}_{sc} \cdot \hat{\mathbf{k}}_{in})^2] \right\} \\
&\propto -2\rho\omega^2 \left\{ \frac{\delta\rho}{\rho} \Omega_\rho^{P-P} + \frac{\delta\alpha}{\alpha} \Omega_\alpha^{P-P} + \frac{\delta\beta}{\beta} \Omega_\beta^{P-P} \right\}
\end{aligned} \tag{E.19}$$

où  $\hat{\mathbf{k}}$  correspond au vecteur d'onde normalisé et  $\Omega_{\alpha,\beta,\rho}^{P-P}$  sont les coefficients de Rayleigh définis par Dahlen et al. (2000). On pourrait montrer qu'il en est de même pour les autres termes de couplage.

# Bibliographie

- Aki, K. et Richards, P. G., 1980. *Quantitative seismology, theory and methods*, vol. 1, 2, Freeman.
- Alexander, S. S. et Phinney, R. A., 1966. A study of the core-mantle boundary using P waves diffracted by the Earth's core, *J. Geophys. Res.*, **71**, 5943–5958.
- Anderson, O. L. et Duba, A., 1997. Experimental melting curve of iron revisited, *J. Geophys. Res.*, **102**, 22659–22669.
- Andrault, D., Fiquet, G., Charpin, T., et Bihan, T. L., 2000. Structure analysis and stability field of  $\beta$ -iron at high P and T, *Am. Mineral.*, **85**, 364–371.
- Antonangeli, D., Occelli, F., Requardt, H., Badro, J., Fiquet, G., et Krisch, M., 2004. Elastic anisotropy in textured hcp-iron to 112 GPa from sound wave propagation measurements, *Earth Planet. Sci. Let.*, **225**, 243–251.
- Beghein, C. et Trampert, J., 2003. Robust normal mode constraints on inner-core anisotropy from model space search, *Science*, **299**, 552–555.
- Belonoshko, A. B., Ahuja, R., et Johansson, B., 2003. Stability of the body-centered-cubic phase of iron in the Earth inner core, *Nature*, **424**, 1032–1034.
- Bergman, M. I., 1997. Measurements of electric anisotropy due to solidification texturing and the implications for the Earth's inner core, *Nature*, **389**, 60–63.
- Bijwaard, H., Spakman, W., et Engdahl, E., 1998. Closing the gap between regional and global travel time tomography, *J. Geophys. Res.*, **103**, 30055–30078.
- Boehler, R., 1993. Temperatures in the Earth's core from melting-point measurements of iron at high static pressures, *Nature*, **363**, 534–536.

- Boehler, R., 1996. Melting temperature of the Earth's mantle and Core : Earth's thermal structure, *Annu. Rev. Earth Planet. Sci.*, **24**, 15–40.
- Bréger, L. et Romanowicz, B., 1998. Three-dimensional structure at the base of the mantle beneath the central Pacific, *Science*, **282**, 718–720.
- Bréger, L., Romanowicz, B., et Tkalčić, H., 1999. PKP(BC-DF) traveltime residuals and short period heterogeneity in the deep earth, *Geophys. Res. Lett.*, **26**, 3169–3172.
- Bréger, L., Tkalčić, H., et Romanowicz, B., 2000. The effect of D'' on PKP(AB-DF) travel time residuals and possible implications for inner core structure, *Earth Planet. Sci. Lett.*, **175**, 133–143.
- Buffett, B. A., 1997. Geodynamics estimates of the viscosity of the Earth's inner core, *Nature*, **402**, 571–573.
- Buffett, B. A. et Glatzmaier, G. A., 2000. Gravitational breaking of inner core rotation in geodynamo simulations, *Geophys. Res. Lett.*, **27**, 3125–3128.
- Buffett, B. A. et Wenk, H. R., 2001. Texturing of the Earth's inner core by Maxwell stresses, *Nature*, **413**, 60–63.
- Buland, R. et Chapman, C. H., 1983. The computation of seismic travel times, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **73**, 1271–1302.
- Calvet, M. et Chevrot, S., 2005. Traveltime sensitivity kernels for the PKP phases in the mantle, *Phys. Earth Planet. Inter.*, **153**, 21–31.
- Calvet, M., Chevrot, S., et Souriau, A., 2006. P-wave propagation in transversely isotropic media - I . Finite-frequency theory, *Phys. Earth Planet. Int.*, **in press**.
- Calvet, M., Chevrot, S., et Souriau, A., 2006. P-wave propagation in transversely isotropic media - II . Application to inner core anisotropy : Effects of data averaging, parametrization and a priori information, *Phys. Earth Planet. Int.*, **in press**.
- Cervený, V., 2001. *Seismic Ray Theory*, Cambridge University Press.
- Cervený, V. et Janský, J., 1983. Ray amplitude of seismic body waves in inhomogeneous radially symmetric media, *Studia geoph. et geod.*, **27**, 9–18.

- Cervený, V. et Přetlová, V., 1977. Computation of ray amplitudes of seismic body waves in vertically inhomogeneous media, *Studia geoph. et geod.*, **21**, 248–255.
- Chapman, C. H. et Orcutt, J. A., 1985. The computation of body wave synthetic seismograms in laterally homogeneous media, *Rev. Geophys.*, **23**, 105–163.
- Chapman, C. H. et Pratt, R. G., 1992. Traveltime tomography in anisotropic media—I. Theory, *Geophys. J. Int.*, **109**, 1–19.
- Chevrot, S., 2002. Optimal measurement of relative and absolute delay times by simulated annealing, *Geophys. J. Int.*, **151**, 164–171.
- Choi, A. P. et Hron, F., 1981. Amplitude and phase shift due to caustics, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **71**, 1445–1461.
- Choy, G. L., 1977. Theoretical seismogram of core phases calculated by frequency-dependent full wave theory, and their interpretation, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **51**, 275–312.
- Choy, G. L. et Richards, P., 1975. Pulse distortion and Hilbert transformation in multiply reflected and refracted body waves, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **65**, 55–70.
- Cleary, J. R. et Haddon, R. A. W., 1972. Seismic Wave Scattering near the Core-Mantle Boundary : a new interpretation of precursors to PKP, *Nature*, **240**, 549–551.
- Cormier, V. F., 1980. The synthesis of complete seismograms in an Earth model specified by radially inhomogeneous layers, *Bull. seismo. Soc. Am.*, **70**, 691–716.
- Cormier, V. F. et Li, X., 2002. Frequency-dependent seismic attenuation in the inner core. II. A scattering and fabric interpretation, *J. Geophys. Res.*, **107**, doi :10.1029/2002JB001796.
- Cormier, V. F. et Richards, P. G., 1977. Full wave theory applied to a discontinuous velocity increase : the Inner Core Boundary, *J. Geophys.*, **43**, 1–31.
- Cormier, V. F. et Richards, P. G., 1988. Spectral synthesis of body waves in Earth models specified by vertically varying layers, in *Seismological Algorithms, Computational Methods and Computer Programs*, edited by D. J. Doornboos, pp. 3–45, Academic Press, London.

- Cormier, V. F. et Stroujkova, A., 2005. Waveform search for the innermost inner core, *Earth Planet. Sci. Lett.*, **236**, 96–105.
- Creager, K. C., 1992. Anisotropy of the inner core from differential travel times of the phases PKP and PKIKP, *Nature*, **356**, 309–314.
- Creager, K. C., 1999. Large-scale variations in inner core anisotropy, *J. Geophys. Res.*, **104**, 23127–23139.
- Creager, K. C., 2000. *AGU Monograph, "Mineral Physics and Seismic Tomography"*, S. I. Karato, L. Stixrude, R. Liebermann, G. Master and A. Forte, Ed.
- Dahlen, F. A. et Baig, A. M., 2002. Fréchet kernels for body-wave amplitudes, *Geophys. J. Int.*, **150**, 440–466.
- Dahlen, F. A. et Tromp, J., 1998. *Theoretical global seismology*, Princeton university press.
- Dahlen, F. A., Hung, S. H., et Nolet, G., 2000. Fréchet kernels for finite-frequency traveltimes— I. Theory, *Geophys. J. Int.*, **141**, 157–174.
- Davaille, A., 1999. Simultaneous generation of hotspots and superwells by convection in a heterogeneous planetary mantle, *Nature*, **402**, 756–760.
- Davaille, A. et Vatteville, J., 2004. On the transient nature of mantle plumes, *Geophys. Res. Lett.*, **32**, doi :10.1029/2005GL023029.
- De Boor, C., 1978. *A practical Guide to Splines*, Springer-Verlag.
- Doornbos, D. J., 1981. The effect of a second order velocity discontinuity on elastic wave near their turning point, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **64**, 499–511.
- Doornbos, D. J. et Mondt, J. C., 1979. Attenuation of P and S waves diffracted around the core, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **57**, 353–379.
- Doornbos, D. J. et Mondt, J. C., 1979. P and S waves diffracted around the core and the velocity structure at the base of the mantle, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **57**, 381–395.
- Durek, J. J. et Romanowicz, B., 1999. Inner core anisotropy inferred by direct inversion of normal mode spectra, *Geophys. J. Int.*, **139**, 599–622.
- Dziewonski, A. et Anderson, D., 1981. Preliminary reference Earth model, *Phys. Earth Planet. Int.*, **25**, 297–356.

- Dziewonski, A. et Gilbert, M., 1971. Solidity of the inner core of the Earth inferred from normal mode observations, *Nature*, **234**, 465–466.
- Dziewonski, A., Hales, A. L., et Lapwood, E. R., 1975. Parametrically simple Earth models consistent with geophysical data, *Phys Earth Planet. Int.*, **10**, 12–48.
- Emery, V., 1997. *Ondes S diffractées à la base du manteau terrestre : modélisation de la diffusion par la structure hétérogène de la couche D*”, Ph.D. thesis, Université de Paris-Sud.
- Emery, V., Maupin, V., et Nataf, H. C., 1999. Scattering of S waves diffracted at the core-mantle boundary : forward modelling, *Geophys. J. Int.*, **139**, 325–344.
- Engdahl, R. E., van der Hilst, R., et Buland, R. P., 1998. Global teleseismic earthquake relocation with improved travel times and procedures for depth determination, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **88**, 722–743.
- Favier, N., 2004. *Tomographie anisotrope haute résolution d’une frontière de plaque transformante : application à la Californie du Sud*, Ph.D. thesis, Université Paul Sabatier, Toulouse III.
- Favier, N. et Chevrot, S., 2003. Sensitivity kernels for shear wave splitting in transverse isotropic media, *Geophys. J. Int.*, **153**, 213–228.
- Favier, N., Chevrot, S., et Komatitsch, D., 2004. Near-influence on shear wave splitting and traveltimes sensitivity kernels, *Geophys. J. Int.*, **156**, 467–482.
- Fedorov, F. I., 1968. *Theory of elastic waves in crystals*, Plenum press.
- Fiquet, G., Badro, J., Guyot, F., Requardt, H., et Krisch, M., 2001. Sound velocities in iron to 110 Gigapascal, *Science*, **291**, 468–471.
- Gannarelli, C. M. S., Alfè, D., et Gillan, M. J., 2003. The particle-in-cell model for ab initio thermodynamics : implications for elastic anisotropy of the Earth’s inner core, *Phys. Earth Planet. Int.*, **139**, 243–253.
- Gannarelli, C. M. S., Alfè, D., et Gillan, M. J., 2005. The axial ratio of hcp iron at the conditions of the Earth’s inner core, *Phys. Earth Planet. Int.*, **152**, 67–77.



- Garcia, R., 2001. *Le noyau terrestre : étude sismologique de quelques structures majeures influençant la dynamique terrestre*, Ph.D. thesis, Université Toulouse III - Paul Sabatier.
- Garcia, R., 2002. Constraints on uppermost inner core structure from waveform inversion of core phases, *Geophys. J. Int.*, **150**, 651–664.
- Garcia, R. et Souriau, A., 2000. Inner core anisotropy and heterogeneity level, *Geophys. Res. Lett.*, **27**, 3121–3124.
- Garcia, R., Chevrot, S., et Weber, M., 2004. Nonlinear waveform and delay time analysis of triplicated core phases, *J. Geophys. Res.*, **109**, 10.1029/2003JB002429.
- Garcia, R., Tkalcic, H., et Chevrot, S., 2006. A new global dataset to study the earth's deep interior - preliminary analysis, *Phys. Earth. Planet. Int.*, **soumis**.
- Garnero, E. J., 2004. A new Paradigm for Earth's Core-Mantle Boundary, *Science*, **304**, 834–836.
- Garnero, E. J. et Helmberger, D. V., 1995. A very basal layer underlying large-scale low-velocity anomalies in the lower mantle beneath the pacific : evidence from core phases, *Phys. Earth Planet. Int.*, **91**, 161–176.
- Garnero, E. J. et Helmberger, D. V., 1996. Seismic detection of a thin laterally varying boundary layer at the base of the mantle beneath the central-Pacific, *Geophys. Res. Lett.*, **23**, 977–980.
- Garnero, E. J. et Jeanloz, R., 2000. Fuzzy Patches on the Earth's Core-Mantle Boundary ?, *Geophys. Res. Lett.*, **27**, 2777–2780.
- Garnero, E. J. et Lay, T., 2003. D" shear velocity heterogeneity, anisotropy, and discontinuity structure beneath the Caribbean and Central America, *Phys. Earth Planet. Int.*, **140**, 219–242.
- Garnero, E. J. et Vidale, J. E., 1998. ScP ; a probe of ultralow velocity zones at the base of the mantle, *Geophys. Res. Lett.*, **96**, 377–380.
- Garnero, E. J., Revenaugh, J., Williams, Q., et Lay, T., 1998. Ultralow Velocity Zone at the Core-Mantle Boundary, in *The Core-Mantle Boundary Region*, edited by M. Gurnis, M. E. Wyssession, E. Knittle, et B. A. Buffet, pp. 319–334, American Geophysical Union.

- Garnero, E. J., Maupin, V., Lay, T., et Fouch, M. J., 2004. Variable azimuthal anisotropy in Earth's lowermost mantle, *Science*, **306**, 259–261.
- Gibson, R. L. et Ben-Menahem, A., 1991. Elastic wave scattering by anisotropic obstacles : Application to fractured volumes, *J. Geophys. Res.*, **96**, 19,905–19,924.
- Glatzmaier, G. A. et Roberts, P. H., 1996. Rotation and magnetisme of Earth's inner core, *Science*, **274**, 1887–1891.
- Goarant, F., Guyot, F., Peyronneau, J., et Poirier, J. P., 1992. Hight-pressure and high-temperature reactions between silicates and liquid iron alloys, in the Diamond Anvil Cell, studied by Analytical Electron Microscopy, *J. Geophys. Res.*, **97**, 4477–4487.
- Gradshteyn, I. et Ryzhik, I., 1965. *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic, New York.
- Grand, S. P., 2002. Mantle shear wave tomography and the fate of subducted slabs, *Phil. Trans. R. Soc.*, **360**, 2475–2491.
- Gu, Y. J., Dziewonski, A. M., Su, W. J., et Ekström, G., 2001. Models of the mantle shear velocity and discontinuities in the pattern of lateral heterogeneities, *J. Geophys. Res.*, **106**, 11169–11199.
- Haddon, R. A. et Cleary, J. R., 1974. Evidence for scattering of seismic PKP waves near the mantle-core boundary, *Phys. Earth Planet. Int.*, **8**, 211–234.
- Hedlin, M. A. H. et Shearer, P. M., 2000. An analysis of large-scale variations in small-scale mantle heterogeneity using Global Seismographic Network recordings of precursors to PKP, *J. Geophys. Res.*, **105**, 13655–13673.
- Hedlin, M. A. H., Shearer, P. M., et Earle, P. S., 1997. Seismic evidence for small-scale heterogeneity throughout the Earth's mantle, *Nature*, **387**, 145–150.
- Hernlund, J. W., Thomas, C., et Tackley, P. J., 2005. A doubling of the post-perovskite phase boundary and structure of the Earth's lower mantle, *Nature*, **434**, 882–886.
- Hirose, K., Karato, S.-I., Cormier, V. F., Brodholt, J. P., et Yuen, D. A., 2006. Unsolved problems in the lowermost mantle, *Geophys. Res. Lett.*, **33**, doi :10.1029/2006GL025691.

- Houard, S. et Nataf, H.-C., 1992. Further evidence for the "Lay discontinuity" beneath northern siberia and the north atlantic from short-period P-waves recorded in France, *Phys. Earth Planet. Int.*, **72**, 264–275.
- Houard, S. et Nataf, H.-C., 1993. Laterally varying reflector at the top of D" beneath northern Siberia, *Geophys. J. Int.*, **115**, 168–182.
- Hung, S. H., Dahlen, F. A., et Nolet, G., 2000. Fréchet kernels for finite-frequency traveltimes– II. Examples, *Geophys. J. Int.*, **141**, 175–203.
- Hung, S. H., Shen, Y., et Chiao, L.-Y., 2004. Imaging seismic velocity structure beneath the Iceland hot spot : A finite frequency approach, *J. Geophys. Res.*, **109**, doi :10.1029/2003JB002889.
- Ishii, M. et Dziewonski, A. M., 2002. The innermost inner core of the earth : Evidence for a change in anisotropic behavior at the radius of about 300 km, *Proc. Natl. acad. Sci. U.S.A.*, **22**, 14026–14030.
- Ishii, M. et Dziewonski, A. M., 2003. Distinct seismic anisotropy at the centre of the earth, *Phys. Earth Planet. Int.*, **140**, 203–217.
- Ishii, M., Dziewonski, A. M., Tromp, J., et Ekström, G., 2002. Joint inversion of normal-mode and body-wave data for inner core anisotropy. 2. Possible complexities, *J. Geophys. Res.*, **107**, 10.1029/2001JB000713.
- Ishii, M., Tromp, J., Dziewonski, A. M., et Ekström, G., 2002. Joint inversion of normal-mode and body-wave data for inner core anisotropy. 1. Laterally homogeneous anisotropy, *J. Geophys. Res.*, **107**, 10.1029/2001JB000712.
- Jeanloz, R., 1979. Properties of iron at high pressures and the state of the core, *J. Geophys. Res.*, **84**, 6059–6069.
- Jeanloz, R., 1990. The nature of the Earth's core, *Annu. Rev. Earth Planet. Sci.*, **18**, 357–386.
- Jeanloz, R. et Wenk, H. R., 1988. Convection and anisotropy of the inner core, *Geophys. Res. Lett.*, **15**, 72–75.
- Jech, J. et Pšenčík, I., 1989. First-order perturbation method for anisotropic media, *Geophys. J. Int.*, **99**, 369–376.

- Karason, H. et van der Hilst, R. D., 2001. Tomographic imaging of the lowermost mantle with differential times of refracted and diffracted core phases (PKP,  $P_{diff}$ ), *J. Geophys. Res.*, **106**, 6569–6587.
- Karato, S., 1993. Inner core anisotropy due to magnetic field-induced preferred orientation of iron, *Science*, **262**, 1708–1711.
- Karato, S., 1999. Seismic anisotropy of the Earth’s inner core resulting from flow induced by Maxwell stresses, *Nature*, **402**, 871–873.
- Karato, S.-I. et Karki, B. B., 2001. Origin of lateral variation of seismic velocities and density in the deep mantle, *J. Geophys. Res.*, **106**, 21771–21783.
- Kendall, J.-M. et Shearer, P. M., 1994. Lateral variations in D” thickness from long-period shear wave data, *J. Geophys. Res.*, **99**, 11575–11590.
- Kendall, J.-M. et Silver, P. G., 1996. Constraints from seismic anisotropy on the nature of the lowermost mantle, *Nature*, **381**, 409–412.
- Kennett, B. L. N., 1983. *Seismic wave propagation in stratified media*, Cambridge University Press.
- Kennett, B. L. N., 2001. *The seismic wavefield. Volume I : Introduction and theoretical development*, Cambridge University Press.
- Kennett, B. L. N. et Engdahl, E. R., 1991. Traveltime for global earthquake location and phase identification, *Geophys. J. Int.*, **105**, 429–465.
- Kennett, B. L. N. et Illingworth, M. R., 1981. Seismic waves in a stratified half space III-piecewise smooth models, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **66**, 633–675.
- Kennett, B. L. N., Engdahl, E. R., et Buland, R., 1995. Constraints on seismic velocities in the earth from traveltimes, *Geophys. J. Int.*, **122**, 108–124.
- Knittle, E. et Jeanloz, R., 1991. Earth’s CMB : results of experiments at high pressures and temperatures, *Science*, **251**, 1438–1443.
- Kvasnička, M. et Janský, J., 1999. Fresnel volumes corresponding to PKP waves in the IASP91 model, *J. Seismo.*, **3**, 375–391.

- Labrosse, S. et Macouin, M., 2003. The inner core and the geodynamo, *C. R. Géoscience*, **335**, 37–50.
- Labrosse, S., Poirier, J. P., et Mouël, J. L. L., 1997. On cooling of the Earth's core, *Phys. Earth Planet. Int.*, **99**, 1–17.
- Laio, A., Bernard, S., Chiarotti, G. L., Scandolo, S., et Tosatti, E., 2000. Physics of iron at Earth's core conditions, *Science*, **287**, 1027–1030.
- Lay, T. et Helmberger, D. V., 1983. A shear velocity discontinuity in the lower mantle, *Geophys. Res. Lett.*, **10**, 63–66.
- Lay, T. et Helmberger, D. V., 1983. A lower mantle S-wave triplication and the shear velocity structure of D", *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, **75**, 799–837.
- Lay, T., Williams, Q., et Garnero, E. J., 1998. The core-mantle boundary layer and deep Earth dynamics, *Nature*, **392**, 461–468.
- Lay, T., Williams, Q., Garnero, E. J., Kellogg, L., et Wyssession, M. E., 1998. Seismic wave anisotropy in the D" region and its implication, in *The Core-Mantle Boundary Region*, edited by M. Gurnis, M. E. Wyssession, E. Knittle, et B. A. Buffet, pp. 299–318, American Geophysical Union.
- Lay, T., Garnero, E. J., et Williams, Q., 2004. Partial melting in a thermo-chemical boundary layer at the base of the mantle, *Phys. Earth planet. Int.*, **146**, 441–467.
- Li, X. et Cormier, V. F., 2002. Frequency dependent attenuation in the inner core : Part I. A viscoelastic interpretation, *J. Geophys. Res.*, **107**, doi :10.1029/2002JB001795.
- Li, X. D. et Romanowicz, B., 1995. Comparaison of global waveform inversions with and without considering cross-branch modal coupling, *Geophys. J. Int.*, **121**, 695–709.
- Li, X. D. et Tanimoto, T., 1993. Waveforms of long-period body waves in a slightly aspherical earth model, *Geophys. J. Int.*, **112**, 92–102.
- Lin, J. F., Heinz, D. L., Campbell, A. J., et Devine, J. M., 2002. Iron-Nickel alloy in the Earth's core, *Geophys. Res. Lett.*, **29**, doi :10.1029/2002GL015089.
- Lin, J. F., Heinz, D. L., Campbell, A. J., Devine, J. M., et Shen, G., 2002. Iron-Silicon alloy in the Earth's core?, *Nature*, **295**, 313–315.

- Lin, J. F., Sturhahn, W., Zhao, J., Shen, G., Mao, H.-K., et Hemley, R. J., 2005. Sound velocities of hot dense iron : Birch’s law revisited, *Science*, **308**, 1892–1894.
- Luo, S. N., Ni, S., et Helmberger, D. V., 2001. Evidence for a sharp lateral variation of velocity at the core-mantle boundary from multipathed PKPab, *Earth Planet. Sci. Lett.*, **189**, 155–164.
- Ma, Y., Somayazulu, M., Shen, G., Mao, H., Shu, J., et Hemley, R., 2004. In situ X-ray diffraction studies of iron to Earth core conditions., *Phys. Earth Planet Inter.*, **143–144**, 455–467.
- Mao, H. K., Wu, Y., Shen, L. C., Shu, J. F., et Jephcoat, A. P., 1990. Static compression of iron to 300 GPa and Fe<sub>0.8</sub>Ni<sub>0.2</sub> alloy to 260 GPa : implications for composition of the core, *J. Geophys. Res.*, **95**, 21737–21742.
- Mao, H. K., Shu, J., Shen, G., Hemley, R. J., Li, B., et Singh, A. K., 1998. Elasticity and rheology of iron above 220 GPa and the nature of the earth’s inner core, *Nature*, **396**, 741–743 (Correction, *Nature* 399, 280, 1999.).
- Marquering, H., Dahlen, F. A., et Nolet, G., 1999. Three-dimensional sensitivity kernels for finite-frequency traveltimes : the banana-doughnut paradox, *Geophys. J. Int.*, **137**, 805–815.
- Masters, G., Johnson, S., Laske, G., et Bolton, B., 1996. A shear-velocity model of the mantle, *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, **354**, 1385–1411.
- Maupin, V., 1994. On the possibility of anisotropy in the D” layer as inferred from the polarization of diffracted S waves, *Phys. Earth planet. Int.*, **87**, 1–32.
- McNamara, A. K., van Keken, P. E., et Karato, S., 2002. Development of anisotropic structure in the Earth’s lower mantle, *Nature*, **416**, 310–314.
- McSweeney, T. J., Creager, K. C., et Merrill, R. T., 1997. Depth extent of inner-core seismic anisotropy and implications for geomagnetism, *Phys. Earth Planet. Int.*, **101**, 131–156.
- Mégnin, C. et Romanowicz, B., 2000. The 3D shear velocity structure of the mantle from the inversion of body, surface and higher mode waveforms, *Geophys. J. Int.*, **143**, 709–728.

- Mensch, T. et Rasolofosaon, P., 1997. Elastic-wave velocities in anisotropic media of arbitrary symmetry—generalization of Thomsen’s parameters  $\epsilon$ ,  $\delta$  and  $\gamma$ , *Geophys. J. Int.*, **128**, 43–64.
- Merkel, S., Shu, J., Gillet, P., Mao, H. K., et Hemley, R. J., 2005. X-ray diffraction study of the single-crystal elastic moduli of  $\epsilon$ -Fe up to 30 GPa, *J. Geophys. Res.*, **110**, doi :10.1029/2004JB003197.
- Montelli, R., Nolet, G., Dahlen, F. A., Masters, G., Engdahl, E. R., et Hung, S.-H., 2004. Finite-frequency tomography reveals a variety of plumes in the mantle, *Science*, **303**, 338–343.
- Montelli, R., Nolet, G., Masters, G., Dahlen, F. A., et Hung, S.-H., 2004. Global P and PP traveltimes tomography : rays versus waves, *Geophys. J. Int.*, **158**, 637–654.
- Moore, M. M., Garnero, E. J., Lay, T., et Williams, Q., 2004. Shear wave splitting and waveform complexity for lowermost mantle structures with low-velocity lamellae and transverse isotropy, *J. Geophys. Res.*, **109**, doi :10.1029/2003JB002546.
- Morelli, A. et Dziewonski, A. M., 1993. Body wave traveltimes and a spherically symmetric P- and S-wave velocity models, *Geophys. J. Int.*, **112**, 178–194.
- Morelli, A., Dziewonski, A. M., et Woodhouse, J. H., 1986. Anisotropy of the inner core inferred from PKIKP travel times, *Geophys. Res. Lett.*, **13**, 1545–1548.
- Mori, J. et Helmberger, D. V., 1995. Localized boundary layer below the mid-Pacific velocity anomaly identified from PcP precursor, *J. Geophys. Res.*, **100**, 20359–20365.
- Muller, G., 1971. Exact ray theory and its application to the reflection of elastic waves from vertically inhomogeneous media, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **21**, 261–283.
- Murakami, M., Hirose, K., Kawamura, K., Sata, N., et Ohishi, Y., 2004. Post-Perovskite Phase Transition in  $MgSiO_3$ , *Science*, **304**, 855–858.
- Nakagawa, T. P. J. T., 2004. Effects of a perovskite-post phase change near core-mantle boundary in compressible mantle convection, *Geophys. Res. Lett.*, **31**, doi :10.1029/2004GL020648.
- Ni, S., Helmberger, D. V., et Tromp, J., 2005. Three-dimensional structure of the African superplume from waveform modelling, *Geophys. J. Int.*, **161**, 283–294.

- Niu, F. et Wen, L., 2001. Hemispherical variations in seismic velocity at the top of the Earth's inner core, *Nature*, **410**, 1081–1084.
- Nolet, G., 1987. *Seismic Tomography*, D. Reidel Publishing Company.
- Oganov, A. R. et Ono, S., 2004. Theoretical and experimental evidence for a post-perovskite phase  $MgSiO_3$  in Earth's D" layer, *Nature*, **430**, 445–448.
- Oganov, A. R., Martoňák, R., Laio, A., Raiteri, P., et Parrinello, M., 2005. Anisotropy of Earth's D" layer and stacking faults in the  $MgSiO_3$  post-perovskite phase, *Nature*, **438**, 1142–1144.
- Oreshin, S. I. et Vinnik, L. P., 2004. Heterogeneity and anisotropy of seismic attenuation in the inner core, *Geophys. Res. Lett.*, **32**, doi :10.1029/2003GL018591.
- Ouzounis, A. et Creager, K. C., 2001. Isotropy overlying anisotropy at the top of the inner core, *Geophys. Res. Lett.*, **28**, 4331–4334.
- Panning, M. et Romanowicz, B., 2004. Inferences on flow at the base of Earth mantle based on seismic anisotropy, *Science*, **303**, 351–353.
- Phinney, R. A. et Alexander, S. S., 1969. The effect of a velocity gradient at the base of the mantle on diffracted P-waves in the shadow, *J. Geophys. Res.*, **74**, 4967–4971.
- Poirier, J.-P., 1991. *Les profondeurs de la Terre*, Masson.
- Poirier, J.-P., 1994. Light elements in the Earth's outer core : a critical review, *Phys. Earth Planet. Inter.*, **85**, 319–337.
- Poirier, J.-P. et Price, G. D., 1999. Primary slip system of  $\epsilon$ -iron and anisotropy of the Earth's inner core, *Phys. Earth Planet. Inter.*, **110**, 147–156.
- Poirier, J.-P. et Shankland, T. J., 1993. Dislocation melting of iron and the temperature of the inner core boundary, revisited, *Geophys. J. Int.*, **115**, 147–151.
- Poupinet, G. et Souriau, A., 1995. An empirical search for short-wavelength heterogeneities in D" using ISC P delays, *Phys. Earth Planet. Int.*, **89**, 1–8.
- Poupinet, G., Pillet, R., et Souriau, A., 1983. Possible heterogeneity of the Earth's core deduced from PKIKP travel times, *Nature*, **305**, 204–206.



- Richards, P. G., 1973. Calculations of body-waves, for caustics and tunneling in core phase, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **35**, 243–264.
- Richards, P. G., 1976. On the adequacy of plane-wave reflexion/transmission coefficients in the analysis of seismic body waves, *Bull. seism. Soc. Am.*, **66**, 701–717.
- Ritsema, J., van Heijst, H., et Woodhouse, J., 1999. Complex shear wave velocity structure imaged beneath Africa and Iceland, *Science*, **286**, 1925–1928.
- Rokosky, J. M., Lay, T., Garnero, E. J., et Russel, S. A., 2004. High-resolution investigation of shear wave anisotropy in D'' beneath the Cocos Plate, *Geophys. Res. Lett.*, **31**, doi :10.1029/2003GL018902.
- Romanovicz, B., 2003. 3D structure of the Earth's lower mantle, *C. R. Geoscience*, **335**, 23–35.
- Romanowicz, B., 2001. Can we resolve 3D density heterogeneity in the lower mantle?, *Geophys. Res. Lett.*, **28**, 1107–1110.
- Romanowicz, B. et Bréger, L., 2000. Anomalous splitting of free oscillations : a reevaluation of possible interpretations., *J. Geophys. Res.*, **105**, 21559–21578.
- Romanowicz, B., Li, X. D., et Durek, J., 1996. Anisotropy in the inner core : Could it be due to low-order convection?, *Science*, **274**, 963–966.
- Rost, S., Garnero, E. J., Williams, Q., et Manga, M., 2005. Seismological constraints on a possible plume root at the core-mantle boundary, *Nature*, **435**, 666–669.
- Saxena, S. K. et Dubrovinsky, L. S., 1998. Thermodynamics of iron phases at high pressure and temperature, in *Properties of Earth and Planetary materials at high pressure and temperature*, edited by L. S. Manghanani et T. Yagi, pp. 271–279, American Geophysical Union.
- Saxena, S. K., Shen, G., et Lazor, P., 1994. Temperatures in Earth's core based on melting and phase transformation experiments on iron, *Science*, **264**, 405–407.
- Saxena, S. K., Dubrovsky, L. S., Häggkvist, P., Cerenius, Y., Shen, G., et Mao, H. K., 1995. Synchrotron X-ray Study of Iron at High Pressure and Temperature, *Science*, **269**, 1703–1704.

- Scales, J. A. et Snieder, R., 2000. The Anatomy of Inverse Problems, *Geophysics*, **65**, 1708–1710.
- Schubert, G., Masters, G., Olson, P., et Tackley, P., 2004. Superplums or plume clusters ?, *Phys. Earth Planet. Int.*, **146**, 147–162.
- Shearer, P. M., 1994. Constraints on inner core anisotropy from PKP(DF) travel times, *J. Geophys. Res.*, **99**, 19647–19659.
- Shearer, P. M. et Toy, K. M., 1991. PKP(BC) versus PKP(DF) differential travel times and aspherical structure in the Earth’s Inner Core, *J. Geophys. Res.*, **96**, 2233–2247.
- Sidorin, I., Gurnis, M., et Helmberger, D. V., 1999. Evidence for a ubiquitous seismic discontinuity at the base of the mantle, *Science*, **286**, 1326–1331.
- Singh, S. C., Taylor, M. A. J., et Montagner, J. P., 2000. On the presence of liquid in earth’s inner core, *Science*, **287**, 2471–2474.
- Sobolev, S. V., Grésillaud, A., et Cara, M., 1999. How robust is isotropic delay time tomography for anisotropic mantle ?, *Geophys. Res. Lett.*, **26**, 509–512.
- Söderlind, P., Moriarty, J. A., et Willis, J. M., 1996. First principles theory of iron up to Earth-core pressure : structural, vibrational, and elastic properties, *Phys. Rev*, **B 53**, 14063–14072.
- Song, X. et Helmberger, D. V., 1993. Anisotropy of Earth’s inner core, *Geophys. Res. Lett.*, **20**, 2591–2594.
- Song, X. et Helmberger, D. V., 1995. Depth dependence of anisotropy of Earth’s inner core, *J. Geophys. Res.*, **100**, 9805–9816.
- Song, X. et Xu, X., 2002. Inner core transition zone and anomalous PKP(DF) waveforms from polar paths., *Geophys. Res. Lett.*, **29**, 10.1029/2001GL013822.
- Souriau, A. et Poupinet, G., 1991. Study of the outermost liquid core using differential travel times of the SKS, SKKS and S3KS phases, *Phys. Earth Planet. Int.*, **68**, 183–199.
- Souriau, A. et Poupinet, G., 1991. The velocity profile at the base of the liquid core from PKP(BC+C<sub>diff</sub>) data : an argument in favour of radial inhomogeneity, *Geophys. Res. Lett.*, **18**, 2023–2026.

- Souriau, A. et Poupinet, G., 1994. Lateral variations in P velocity and attenuation in the D'' layer, from diffracted P waves, *Phys. Earth Planet. Int.*, **84**, 227–234.
- Souriau, A. et Romanowicz, B., 1996. Anisotropy in inner core attenuation : a new type of data to constrain the nature of the solid core, *Geophys. Res. Lett.*, **23**, 1–4.
- Souriau, A. et Romanowicz, B., 1997. Anisotropy in the inner core : relation between P-velocity and attenuation, *Phys. earth Planet. Int.*, **101**, 33–47.
- Souriau, A. et Roudil, P., 1995. Attenuation in the uppermost inner core from broad-band GEOSCOPE PKP data, *Geophys. J. Int.*, **123**, 572–587.
- Souriau, A., Roudil, P., et Moynot, B., 1997. Inner core rotation : facts and artifacts., *Geophys. Res. Lett.*, **24**, 2103–2106.
- Souriau, A., Garcia, R., et Poupinet, G., 2003. The seismological picture of the inner core : structure and rotation, *C. R. Geosciences*, **335**, 51–63.
- Souriau, A., Teste, A., et Chevrot, S., 2003. Is there any structure inside the liquid core ?, *Geophys. Res. Lett.*, **1567**, doi :10.1029/2003GL017008.
- Spies, M., 1994. Elastic waves in homogeneous and layered transversely isotropic media : Plane waves and Gaussian wave packets. A general approach, *J. Acoust. Soc. Am.*, **95**, 1748–1760.
- Steinle-Neumann, G., Stixrude, L., Cohen, R. E., et Gülseren, O., 2001. Elasticity of iron at the temperature of the earth's inner core, *Nature*, **413**, 47–60.
- Stixrude, L. et Cohen, R. E., 1995. High pressure elasticity of iron and anisotropy of Earth's inner core, *Science*, **267**, 1972–1975.
- Stixrude, L., Wasserman, E., et Cohen, R. E., 1997. Composition and temperature of Earth's inner core, *J. Geophys. Res.*, **102**, 24729–24739.
- Stutzmann, E., Vinnik, L., Ferreira, A., et Singh, S., 2000. Constraint on the S-wave velocity at the base of the mantle, *Geophys. Res. Lett.*, **27**, 1571–1574.
- Su, W.-J. et Dziewonski, A. M., 1995. Inner core anisotropy in three dimensions, *J. Geophys. Res.*, **100**, 9831–9852.

- Sylvander, M. et Souriau, A., 1996. P-velocity structure of the core-mantle boundary region inferred from PKP(AB)-PKP(BC) differential travel times, *Geophys. Res. Lett.*, **23**, 853–856.
- Sylvander, M., Ponce, B., et Souriau, A., 1997. Seismic velocities at the core-mantle boundary inferred from P waves diffracted around the core, *Phys. Earth Planet. Int.*, **101**, 189–202.
- Tanaka, S. et Hamaguchi, H., 1997. Degree one heterogeneity and hemispherical variation of anisotropy in the inner core from PKP(BC)-PKP(DF) times, *J. Geophys. Res.*, **102**, 2925–2938.
- Tanimoto, T., 1995. Formalism for traveltimes inversion with finite frequency effects, *Geophys. J. Int.*, **121**, 103–110.
- Tarantola, A., 1987. *Inverse Problem Theory - Methods for data fitting and model parameter estimation*, Elsevier.
- Tkalčić, H. et Flanagan, M., 2004. Structure of the deep inner core from antipodal PKPPKP waves, *Eos Trans. AGU ; Fall Meet. Suppl.*, **85**(47), Abstract T45A–06.
- Tkalčić, H., Romanowicz, B., et Houy, N., 2002. Constraints on D'' structure using PKP(AB-DF), PKP(BC-DF) and PcP-P traveltimes data from broad-band records, *Geophys. J. Int.*, **148**, 599–616.
- Trampert, J., 1998. Global seismic tomography : the inverse problem and beyond, *Inverse Problems*, **14**, 371–385.
- Trampert, J. et van der Hilst, R. D., 2005. Toward a quantitative interpretation of Global Seismic Tomography, in *Earth's Deep Mantle : Structure, Composition, and Evolution*, pp. 47–62, American Geophysical Union.
- Trampert, J., Vacher, P., et Vlaar, N., 2001. Sensitivities of seismic velocities to temperature, pressure and composition in the lower mantle, *Phys. Earth Planet. Int.*, **124**, 255–267.
- Trampert, J., Deschamps, F., Resovsky, J., et Yuen, D., 2004. Probabilistic tomographic maps chemical heterogeneities throughout the lower mantle, *Science*, **306**, 853–856.
- Tromp, J., 1993. Support for anisotropy of the Earth's inner core from free oscillations, *Nature*, **366**, 678–681.

- Tromp, J., 1995. Normal-mode splitting observations from the great 1994 Bolivia and Kuril Islands earthquakes : Constraints on the structure of the mantle and inner core., *GSA today*, **5**, 137–151.
- Tromp, J., Tape, C., et Liu, Q., 2005. Seismic tomography, adjoint methods, time reversal and banana-doughnut kernels, *Geophys. J. Int.*, **160**, 195–216.
- Tsuchiya, T., Tsuchiya, J., Umemoto, K., et Wentzcovitch, R. M., 2004. Elasticity of post-perovskite  $MgSiO_3$ , *Geophys. Res. Lett.*, **31**, doi :10.1029/2004GL020278.
- Tsuchiya, T., Tsuchiya, J., Umemoto, K., et Wentzcovitch, R. M., 2004. Phase transition in  $MgSiO_3$  perovskite in the earth’s lower mantle, *Earth Planet. Sci. Lett.*, **100**, 241–248.
- Valenzuela, R. W. et Wyssession, M. E., 1998. Illuminated the base of the mantle with diffracted wave, in *The Core-Mantle Boundary Region*, edited by M. Gurnis, M. E. Wyssession, E. Knittle, et B. A. Buffet, pp. 57–71, American Geophysical Union.
- Van der Hilst, R., Li, C., et Karason, H., 2004. A new global model for 3-D variations in P wave speed in Earth’s mantle, *Eos Trans. AGU*, pp. Fall Meet. Suppl., Abstract T33A–1359.
- van der Hilst, R. D., Widiyantoro, S., et Engdahl, E. R., 1997. Evidence for deep mantle circulation from global tomography, *Nature*, **386**, 578–584.
- Vidale, J. E. et Benz, H. M., 1993. Seismological mapping of fine structure near the base of the Earth’s mantle, *Nature*, **361**, 529–532.
- Vidale, J. E. et Hedlin, M., 1998. Intense scattering at the core-mantle boundary north of tonga : evidence for partial melt, *Nature*, **391**, 682–685.
- Vinnik, L., Farra, V., et Romanowicz, B., 1989. Observational evidence for diffracted SV in the shadow of the Earth’s core, *Geophys. Res. Lett.*, **16**, 519–522.
- Vinnik, L., Romanowicz, B., et Bréger, L., 1994. Anisotropy in the center of the inner core, *Geophys. Res. Lett.*, **21**, 1231–1234.
- Vinnik, L., Romanowicz, B., Stunff, Y. L., et Makeyeva, L., 1995. Seismic anisotropy in the D” layer, *Geophys. Res. Lett.*, **22**, 1657–1660.

- Vočadlo, L., Alfé, D., Gillan, M. J., Wood, I. G., Brodholt, J. P., et Price, G. D., 2003. Possible thermal and chemical stabilization of body-centered-cubic iron in the Earth's core, *Nature*, **424**, 536–539.
- Weber, P. et Machetel, P., 1992. Convection within the inner-core and thermal implications, *Geophys. Res. Lett.*, **19**, 2107–2110.
- Wen, L. et Helmberger, D. V., 1998. Ultra-low velocity zone near the core-mantle boundary from broadband pkp precursors, *Science*, **279**, 1701–1703.
- Wenk, H. R., Baumgardner, J. R., Lebensohn, R. A., et Tomé, C. N., 2000. A convection model to explain anisotropy of the inner core, *J. Geophys. Res.*, **105**, 5663–5677.
- Wenk, H. R., Matthies, S., Hemley, R. J., Mao, H. K., et Shu, J., 2000. The plastic deformation of iron at pressures of the Earth's inner core, *Nature*, **405**, 1044–1047.
- Williams, Q., 1998. The temperature contrast across D", in *The Core-Mantle Boundary*, edited by G. M., M. E. Wyssession, E. Knittle, et B. A. Buffet, pp. 73–81, American Geophysical Union.
- Williams, Q. et Garnero, E. J., 1996. Seismic evidence for partial melt at the base of the Earth's mantle, *Science*, **273**, 1528–1530.
- Williams, Q., Jeanloz, R., Bass, J., Svendsen, B., et Ahrens, T. J., 1987. The melting curve of iron to 250 Gigapascals : a constraint on the temperature at Earth's center, *Science*, **236**, 181–182.
- Williams, Q., Revenaugh, J. S., et Garnero, E. J., 1998. A correlation between ultra-low basal velocities in the mantle and hot spots, *Science*, **281**, 546–549.
- Woodhouse, J. H., Giardini, D., et Li, X. D., 1986. Evidence for inner core anisotropy from free oscillations, *Geophys. Res. Lett.*, **13**, 1549–1552.
- Wookery, J., Kendall, J. M., et Rumpker, G., 2005. Lowermost mantle anisotropy beneath the north Pacific from differential S-ScS splitting, *Geophys. J. Int.*, **161**, 829–838.
- Wyssession, M. E., 1996. Large-scale structure at the core-mantle boundary from diffracted waves, *Nature*, **382**, 244–248.

- Wyssession, M. E., Lay, T., Revenaugh, J., Williams, Q., Garnero, E. J., Jeanloz, R., et Kellogg, L. H., 1998. The D" Discontinuity and its Implications, in *The Core-Mantle Boundary Region*, edited by M. Gurnis, M. E. Wyssession, E. Knittle, et B. A. Buffet, pp. 273–297, American Geophysical Union.
- Yamazaki, D. et Karato, S., 2002. Fabric development in (Mg, Fe)O during large strain, shear deformation : Implication for seismic anisotropy in the Earth's lower mantle, *Phys. Earth Planet. Int.*, **131**, 251–267.
- Yoshida, S., Sumita, I., et Kumazawa, M., 1996. Growth model of the inner core coupled with the outer core dynamics and the resulting elastic anisotropy, *J. Geophys. Res.*, **101**, 28085–28103.
- Yoshizawa, K. et Kennett, B. L. N., 2005. Sensitivity kernels for finite-frequency surface waves, *Geophys. J. Int.*, **162**, 910–926.
- Yukutake, T., 1998. Implausibility of thermal convection in the Earth's solid inner core, *Phys. Earth Planet. Int.*, **108**, 1–13.
- Zhao, L. et Dahlen, F. A., 1996. Mode-sum to ray-sum transformation in a spherical and an aspherical Earth, *Geophys. J. Int.*, **126**, 389–412.
- Zhao, L., Jordan, T. H., et Chapman, C., 2000. Three-dimensional fréchet differential kernels for seismic delay times, *Geophys. J. Int.*, **141**, 558–576.





# Résumé

Dans cette thèse, nous avons examiné l'apport de la théorie des noyaux de sensibilité des ondes PKP et  $P_{diff}$  pour l'étude de la graine anisotrope et de la couche D". Nous avons calculé les noyaux de sensibilité des ondes PKP(DF) dans la graine pour une perturbation élastique transverse isotrope décrite par cinq paramètres. Cependant, lors de l'inversion des résidus de temps de propagation du fichier EHB, nous avons montré que les noyaux de sensibilité n'ont pas un apport significatif par rapport à la théorie des rais pour l'étude de la graine. Par contre, nous avons obtenu trois modèles de graine différents, caractérisés par une sous-graine de 450 à 550 km de rayon avec un axe de symétrie lent ou rapide parallèle à l'axe de rotation de la Terre. Enfin, nous avons calculé les noyaux de sensibilité des ondes PKP, présentant une structure complexe à cause des interférences entre les différentes phases, et ceux des ondes  $P_{diff}$  obtenus en combinant l'approximation de Born et de Langer.

## Abstract

In this thesis, we have examined the contribution of finite-frequency kernels for the study of the anisotropic inner core and the D" layer. We have computed the sensitivity kernels for PKP(DF) waves in the inner core for a transverse isotropic perturbation of the stiffness tensor described by five parameters. The inversion of traveltimes residuals from EHB catalog shows that sensitivity kernels do not brought significant improvements to the inner core study compared to ray theory. On the other hand, we have obtained three anisotropic inner core models with an innermost inner core radius of 450-550 km and a slow or rapid symmetry axis parallel to Earth's rotation axis. Finally, we have computed sensitivity kernels for PKP waves in the mantle, which present a complex structure because of interferences between the different PKP branches, and for  $P_{diff}$  waves from the combination of Born and Langer approximation.